Тема 14. ***Метод ортогональних перетворень та його застосування при дослідженні рівнянь поверхонь другого порядку***

Література:[1], [2], [5], [6], [11], [13], [15].

Теоретична частина:

1. Навести основні поняття, які стосуються теорії квадратичних форм; викласти метод ортогональних перетворень зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Навести стислі відповіді на теоретичні запитання задач № 6.1–6.6, № 6.13–6.18 з [5].

2. Навести алгоритм зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду. Навести відповіді на теоретичні запитання задач №6.45 – 6.47 з [5].

Практична частина:

1. Застосувати метод ортогональних перетворень для зведення заданої квадратичної форми $L\,(x_1,\,x_2,\,x_3)$ до канонічного вигляду $L_1(y_1,\,y_2,\,y_3)$ Обов'язково виписувати матриці переходу до канонічного базису, лінійне перетворення, що зводить до канонічного вигляду; виконувати можливі перевірки правильності розрахунків.

2. Записати рівняння $L(x,\,y,\,z)=f_i,\ i=1,2,3$ та спрощенні рівняння $L_1(x,\,y,\,z)=f_i,\ i=1,2,3$, які є рівняннями поверхонь $P_1,\ P_2,\ P_3\subset R^3$.

3. Звести рівняння поверхонь $P_1,\ P_2,\ P_3\subset R^3$, заданих рівняннями $L_1(x,\,y,\,z)=f_i,\ i=1,2,3$, до канонічного вигляду, вказати їх назву.

4. Навести зображення цих поверхонь безпосередньо.

5. Навести зображення зазначених поверхонь у системі комп'ютерної математики Mathcad.

6. При виконанні практичної частини використати Mathcad для перевірки правильності знаходження власних векторів та власних значень, розв'язання характеристичного рівняння та однорідних систем рівнянь, обчислення визначників, зведення матриці квадратичної форми до діагонального вигляду тощо. Автоматизувати процес побудови канонічної квадратичної форми за заданою квадратичною формою та зведення рівнянь поверхонь $P_1,\ P_2,\ P_3\subset R^3$ до канонічного вигляду. у системі Mathcad, склавши відповідні програми.

7.Оформити всі дослідження у Mathcad у вигляді додатку.

Нижче наведено варіанти завдань, а також відповіді до пункту 1 практичної частини кожного завдання.

Варіанти практичних завдань до теми 14

1. $L\,(x_1,\,x_2,\,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

$f_1=0,\ f_2=24,\ f_3=-12$

2. $L\,(x_1,\,x_2,\,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 15,\ f_3 = -30$

3. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -24$

4. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 12,\ f_3 = -24$

5. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -12$

6. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 10,\ f_3 = -20$

7. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 8,\ f_3 = -16$

8. $L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 12,\ f_3 = -24$

9. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 16,\ f_3 = -24$

10. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 10,\ f_3 = -20$

11. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 18,\ f_3 = -27$

12. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -12$

13. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 9,\ f_3 = -12$

14. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -6$

15. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -6$

16. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 16,\ f_3 = -24$

17. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 14,\ f_3 = -14$

18. $L(x_1, x_2, x_3) = 1{,}5x_1^2 - 5x_2^2 + 1{,}5x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -6$

19. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 6,\ f_3 = -12$

20. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 10,\ f_3 = -15$

21. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 3,\ f_3 = -9$

22. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 20,\ f_3 = -10$

23. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 24,\ f_3 = -12$

24. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = -3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$f_1 = 0,\ f_2 = 40,\ f_3 = -20$

Відповіді до пункту 1 практичної частини кожного завдання теми 14. Метод ортогональних перетворень та його застосування при дослідженні рівнянь поверхонь другого порядку.

Наведено канонічну квадратичну форму, матрицю переходу до канонічного базису, лінійне перетворення, що зводить до канонічного вигляду.

Відповідь визначається неоднозначно.

1. $L_1(y_1,\ y_2,\ y_3) = y_1^2 - 6y_2^2 + 6y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

2. $L_1(y_1,\ y_2,\ y_3) = y_1^2 - 5y_2^2 + 3y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $X = TY$.

3. $L_1(y_1,\ y_2,\ y_3) = 6y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

4. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = -6y_1^2 - 6y_2^2 + 6y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

5. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = 3y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

6. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = 5y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

7. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = 4y_1^2 - 2y_2^2 + 0{,}5y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

8. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = 3y_1^2 - 6y_2^2 - 2y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$; $X = TY$.

9. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = -8y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

10. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

11. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = -9y_1^2 - y_2^2 + 9y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

12. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=4y_1^2-3y_2^2+6y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

13. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=y_1^2+3y_2^2-y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

14. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=3y_1^2-3y_2^2+y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$; $X=TY$.

15. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=3y_1^2+y_2^2-6y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

16. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=y_1^2-2y_2^2+8y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

17. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=-2y_1^2-7y_2^2+2y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

18. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=-6y_1^2+y_2^2+3y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

19. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3)=-2y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$; $T=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$; $X=TY$.

20. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = -y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

21. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

22. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = -5y_1^2 + 5y_2^2 + 2y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

23. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = -2y_1^2 + 6y_2^2 - 3y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $X = TY$.

24. $L_1(y_1,\, y_2,\, y_3) = 4y_1^2 + 10y_2^2 - 5y_3^2$; $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$; $X = TY$.