

Розділ 1. Границі. Неперервність

Функція. Способи задання функцій

О. Якщо кожному значенню $x, x \in X$ ставиться у відповідність за деяким законом значення $y, y \in Y$, то кажуть, що на множині X задана функція $y = f(x)$.

Множина X - область визначення функції,

Множина Y - область значень функції.

Існують такі способи задання функції:

1. *Аналітичний* спосіб

а) функція задається в *явному* виді за допомогою однієї або декількох формул.

Приклад:

$$\text{Функція } \text{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \text{ (sign - «сигнум»)} \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Функція Діріхле (німецький математик)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{раціональне} \\ 0, & x - \text{іраціональне} \end{cases}$$

б) функція $y(x)$ задається в *неявному* вигляді рівнянням $F(x, y) = 0$.

Наприклад,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a, b - \text{const}, \quad x - \text{аргумент}, \quad y - \text{функція.}$$

в) функція $y(x)$ задана в *параметричному* вигляді:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ де } t - \text{параметр}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Приклад:

Функція $y(x)$ задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

Якщо піднести до квадрата обидві частини обох рівнянь та додати їх, отримаємо

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$x^2 + y^2 = 1$ - рівняння кола з центром в точці $(0, 0)$ радіуса $R = 1$ (саме через це тригонометричні функції іноді називають круговими).

г) функція $y(x)$ задається у вигляді *суперпозиції* функцій, тобто

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x) \quad y = F[\varphi(x)].$$

Отримана функція називається складною.

2. *Табличний* спосіб (у вигляді таблиць).

3. *Графічний* спосіб (у вигляді графіків).
4. *Програмний* спосіб (у вигляді комп'ютерних програм).

Класифікація функцій

1. Многочлен або поліном (ціла раціональна функція).

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

(використані операції $+$, $-$, \times , піднесення до цілого додатного степеня).

2. Дробово-раціональна функція (раціональний дріб)

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \text{ де } Q_m(x), P_n(x) - \text{многочлени степенів } m \text{ і } n \text{ відповідно.}$$

3. Ірраціональні функції.

(використовуються операції $+$, $-$, \times , піднесення до раціонального степеня).

Типи функцій 1-3 називаються *алгебраїчними*.

4. Трансцендентні функції – це ті функції, що не є *алгебраїчними*.

Основні елементарні функції

Це функції: $y = const$; степенева; показникова; логарифмічна; тригонометричні; обернені тригонометричні.

Елементарні функції

О. Елементарною функцією називається функція, яка представляється у вигляді $y = f(x)$, де $f(x)$ – є єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та суперпозицій.

Гіперболічні функції

$$\text{Косинус гіперболічний: } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$\text{Синус гіперболічний: } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\text{Тангенс гіперболічний: } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\text{Котангенс гіперболічний: } cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0.$$

Це елементарні функції.

Назва «гіперболічні» впливає з того, що параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases}$$

задають гіперболу.

Піднесемо обидві частини обох рівнянь до квадрата і віднімемо від першого друге.

$$x^2 - y^2 = \underbrace{ch^2 t - sh^2 t}_1 \quad (\text{перевіряється безпосередньо підстановкою}).$$

$$x^2 - y^2 = 1 - \text{рівняння гіперболи.}$$

Для гіперболічних функцій мають місце формули:

Для порівняння:

- | | |
|--|--|
| 1. $ch^2 x - sh^2 x = 1$ | 1. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ |
| 2. $ch^2 x + sh^2 x = ch 2x$ | 2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ |
| 3. $2shx \cdot chx = sh 2x$ | 3. $2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ |
| 4. $ch(x + y) = chx \cdot chx + shx \cdot shy$ | 4. $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ |
| 5. $sh(x + y) = shx \cdot chx + chx \cdot shy$ | 5. $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ |
- (формули перевіряються безпосередньо). (для кругових тригонометричних функцій).

Границя функції в точці

Будемо вважати, що функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, за виключенням можливо самої точки $x = a$.

О. Число A називається границею функції $f(x)$ в точці $x = a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умову: $0 < |x - a| < \delta$ (1)

виконується умова $|f(x) - A| < \varepsilon$ (2).

Коротко: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пояснення: $0 < \underbrace{|x - a|}_{x \neq a} < \delta$ (1)

Розкриємо модуль: $-\delta < x - a < \delta$

$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow x \in O(a, \delta)$ - окіл точки a радіусу δ , при цьому $x \neq a$.

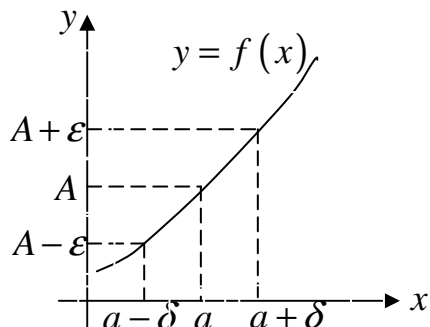
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (2)$$

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \Rightarrow f(x) \in O(A, \varepsilon).$$

Геометрична інтерпретація.

Задаємо ε ; знаходимо δ .

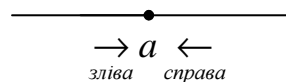


Для $x \in O(a, \delta)$ відповідні значення $f(x) \in O(A, \varepsilon)$.

Коротко: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Односторонні границі

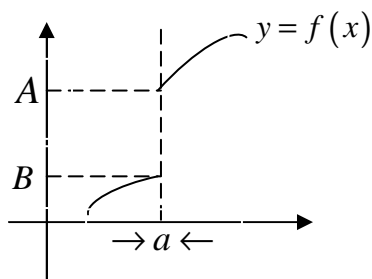
В наведеному означенні границі не вказувалось, з якого боку x прагне до a - зліва, чи справа. Тобто розглядалась так звана двостороння границя



Якщо ж вказується, з якого боку x прямує до a , то мають місце односторонні границі. Цей факт записується так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = A \text{ - границя функції в т. } x = a \text{ справа.}$$

Якщо $A = B$, то в точці $x = a$ існує двостороння границя.



Тут $A \neq B$.

Нескінченно малі та нескінченно великі функції

О.1. Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою в точці $x = a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

О.2. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою в точці $x = a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Якщо $f(x)$ приймає тільки додатні значення, то пишуть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Якщо $f(x)$ приймає тільки від'ємні значення, то пишуть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Г. Якщо функція $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці $x = a$, то функції $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно

великою в точці $x = a$.

Вірно і обернене.

Неперервність функції в точці

У цьому пункті будемо вважати, що функція $f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$ і в самій точці $x = a$.

О.1. Функція $f(x)$ неперервна в т. $x = a$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

З формули (1) випливає:

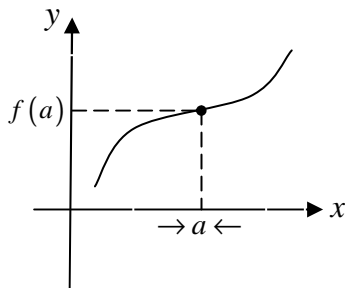
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a) \quad (1')$$

(1') означає, що для неперервної функції можна міняти знак границі (\lim) і знак функції (f) місцями.

0.2. Функція $f(x)$ неперервна в т. $x = a$, якщо

$$\underbrace{f(a+0)}_{\substack{\text{границя функції} \\ \text{в т.а справа}}} = \underbrace{f(a-0)}_{\substack{\text{границя функції} \\ \text{в т.а зліва}}} = \underbrace{f(a)}_{\substack{\text{значення} \\ \text{функції} \\ \text{в т.х=a}}}. \quad (2)$$

Геометрично:



0.3. Функція $f(x)$ неперервна в т. $x = x_0$, якщо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad (3)$$

тобто нескінченно малому приросту аргументу в т. $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції.

Точки розриву функції та їх класифікація

Точки, в яких порушуються умови неперервності функцій, називаються точками розриву. За основу беремо означення 2:

$$f(a+0) = f(a-0) = f(a). \quad (2)$$

Розрізняють точки розриву 1-го і 2-го роду.

Точки розриву I роду двох типів: точки усувного розриву (устранимого – рос.) та точки розриву типу «стрибок».

Для точок розриву I роду: $\exists f(a+0), f(a-0)$.

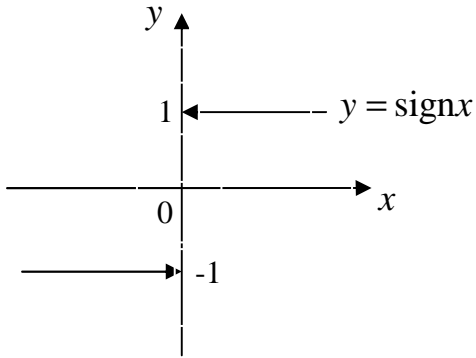
а) усувний розрив: $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$;

б) розрив типу «стрибок»: $f(a+0) \neq f(a-0)$. В цьому випадку підраховують величину стрибка: $\Delta f = f(a+0) - f(a-0)$.

Для точок розриву II роду: хоча б одне з значень $f(a+0)$ чи $f(a-0)$ нескінченне або не існує.

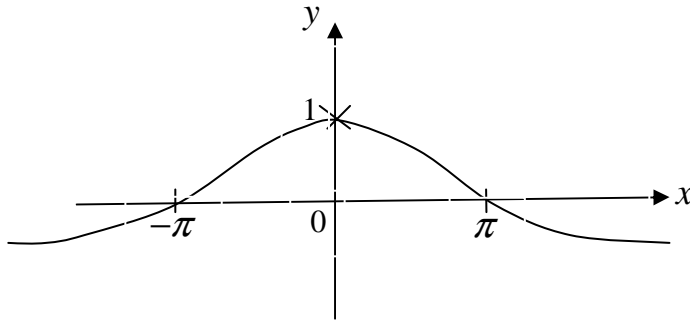
Приклади.

$$1. \quad y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Точка $x = 0$ – точка розриву I роду типу «стрибок».
 $f(a+0) = 1$, $f(a-0) = -1$, $f(a+0) \neq f(a-0)$
 $\Delta f = f(0+0) - f(0-0) = 1 - (-1) = 2$.

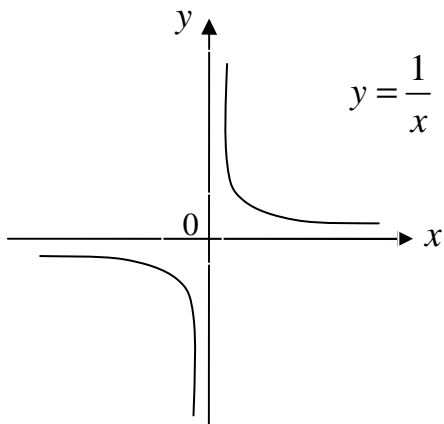
2. $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$.



Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Точка $x = 0$ точка усувного розриву, бо $f(0+0) = f(0-0) = 1 \neq f(0)$,
 в точці $x = 0$ функція взагалі невизначена.

3. $y = \frac{1}{x}$



$x = 0$ – точка розриву II роду,
 бо $f(0+0) = +\infty$.

Деякі важливі границі

Перша важлива границя та наслідки з неї

Г. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (1) – перша важлива границя.

Без доведення.

Наслідки.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (2)

Д. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ (3)

Д. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x \\ x = \sin y \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = 1$ (4)

Доведення аналогічно.

Як бачимо, всі границі (1) – (4) дорівнюють 1.

О. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow a$ і $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$, то вони

називаються еквівалентними при $x \rightarrow a$.

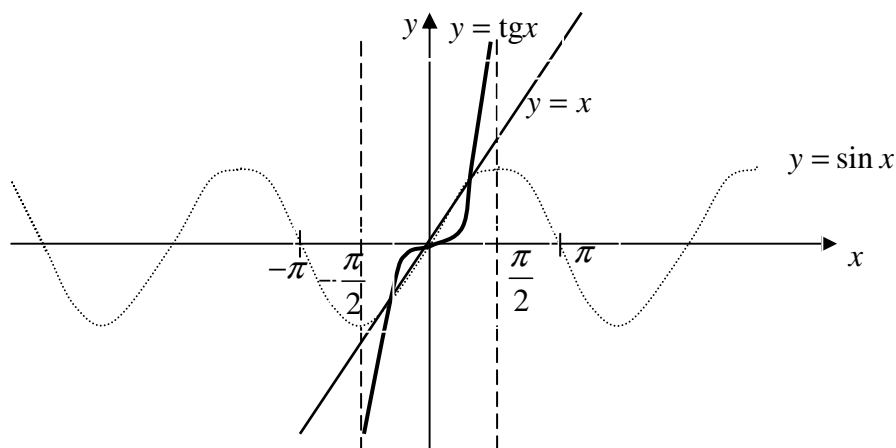
Позначення: $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \rightarrow a$.

Тоді з формул (1) – (4) випливає:

$\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \sim x$, $x \rightarrow 0$ або

$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow 0$ (5).

Геометрично:



Видно, що при $x \rightarrow 0$ функції теж прямують до нуля $x \sim f(x)$.

Зауваження. Число e .

Розглянемо числову послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, тобто поклавши $n = 1, 2, 3, \dots$

(тут $n \in \mathbb{N}$). Маємо x_1, x_2, x_3, \dots

$$n = 1 \quad x_1 = (1+1) = 2$$

$$n = 2 \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$n = 3 \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$$

і т. д.

Доведено, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = 2,718284 \dots$

Доведено також, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (тут $x \in \mathbb{R}$).

Друга важлива границя і її наслідки

$$\underline{\text{I.}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (1)$$

Без доведення. (1) – друга важлива границя.

Наслідки:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. (2) – інша форма другої важливої границі.

$$\underline{\text{Д.}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} = y \\ x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

$$\underline{\text{2.}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Д.}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \log_a \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}}_e = \log_a e = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

Покладемо в (3) $a = e$. Тоді $\log_e(1+x) = \ln(1+x)$; $\ln e = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (4)$$

$$\underline{3.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \underline{Д.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = y \\ a^x = 1 + y \\ x = \log_a(1 + y) \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1 + y)} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a. \\ &\quad \begin{array}{c} y \xrightarrow{\quad} \ln a \\ \text{формула (3)} \end{array} \end{aligned}$$

Покладемо в (5) $a = e$, $\ln e = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (6).$$

Висновок: з (4), (6) випливає, що

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad x \rightarrow 0.$$

$$\text{Тоді } x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad x \rightarrow 0. \quad (7)$$

Порівняння нескінченно малих

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow a$.

О.1. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку

малості, ніж $\beta(x)$.

Коротко: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow a$

(o – мале від $\beta(x)$)

по іншому $\alpha(x) \ll \beta(x)$ – $\alpha(x)$ значно менше, ніж $\beta(x)$.

О.2. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості при $x \rightarrow a$.

Коротко $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $x \rightarrow a$

(O – велике від $\beta(x)$).

Зокрема, якщо $A = 1$, тобто $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні нескінченно

малі при $x \rightarrow a$.

Коротко $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow a$ (введено вже раніше при $x \rightarrow 0$).

Властивості еквівалентних нескінченно малих функцій

1⁰. Якщо $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$,

$$\beta(x) \sim \gamma(x) \text{ при } x \rightarrow a,$$

то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ при $x \rightarrow a$.

Д. Треба довести, що $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}}_{=1} = 1.$$

2⁰. Якщо $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \beta(x) \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\beta(x)} \quad (**).$$

Доведемо (*)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \beta(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \beta(x).$$

Висновок 1. З властивості 1⁰ випливає справедливість введених раніше ланцюжків еквівалентностей (5) і (7). Тепер з (5) і (7) випливає такий ланцюжок еквівалентностей:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg}x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad x \rightarrow 0. \quad (8)$$

Має місце і більш загальне співвідношення:

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim tgu(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg}u(x) \sim \ln(1+u(x)) \sim e^{u(x)} - 1, \quad (9)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow a.$$

Висновок 2. З властивості 2⁰ випливає, що в *добутку* і *частці* можна заміняти функції на еквівалентні, більш прості (але не в сумі і різниці).

Приклад. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin 2x \cdot \sin 4x}{\operatorname{arctg}x^2} = \left| \begin{array}{l} \sin 2x \sim 2x \\ \sin 4x \sim 4x \\ \operatorname{arctg}x^2 \sim x^2 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x \cdot 4x}{x^2} = 8.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(e^x - 1) \cdot \ln(1+x)}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 \sim x \\ \ln(1+x) \sim x \\ \sin^2 x \sim x^2 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1.$$

Еквівалентні нескінченно великі

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ нескінченно великі при $x \rightarrow a$. Для цих функцій поняття еквівалентних вводиться так само, як і для нескінченно малих.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1; \text{ коротко } f(x) \sim \varphi(x), x \rightarrow a.$$

Г. Функції $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ і $\varphi(x) = a_0 x^n$, $a_0 \neq 0$, еквівалентні нескінченно великі при $x \rightarrow \infty$.

Коротко: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \sim a_0 x^n$, $x \rightarrow \infty$, $a_0 \neq 0$ (10).

$$\begin{aligned} \underline{\text{Д.}} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{a_0 x^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n} \right) = 1. \end{aligned}$$

Приклади. Знайти задані границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 4x + 1}{2 + 5x + 6x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left| \frac{3x^2 + 4x + 1 \sim 3x^2}{2 + 5x + 6x^2 \sim 6x^2} \right|_{x \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2}{6x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(5x+1)^2 \cdot (3-x)}{(2x-1)^3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left| \frac{5x+1 \sim 5x}{3-x \sim -x} \right|_{x \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(5x)^2 \cdot (-x)}{(2x)^3} = -\lim_{x \rightarrow a} \frac{5^2 x^3}{2^3 x^3} = -\frac{25}{8}.$$