Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Основні поняття

1. *Означення похідної. Її геометричний і механічний зміст.*

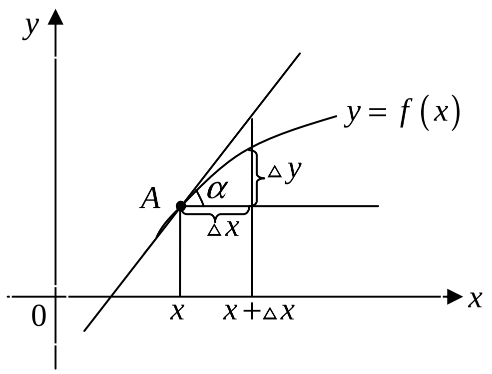
Для заданої функції $y = f(x)$, знайдемо приріст $\triangle y$, задавши приріст аргументу $\triangle x$ в точці x.

$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$.

О. Якщо існує границя $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, то ця границя називається похідною від функції $f(x)$ в точці x і позначається: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Отже, $y' = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ (1).

Геометрично: $y' = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x, f(x))$.



Механічний зміст:

Вважаємо, що точка рухається прямолінійно, закон її руху $S = S(t)$.

Тоді $S' = V(t)$ – похідна $S'(t)$ швидкість точки в момент часу t.

2. *Односторонні похідні.*

В формулі (1) означення похідної під границею розумілась двостороння границя, тобто $\triangle x \to 0$ і зліва і справа.

Односторонні похідні визначаються так:

$\exists \lim\limits_{\triangle x \to 0+0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x+0)$ – права похідна,

$\exists \lim\limits_{\triangle x \to 0-0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x-0)$ – ліва похідна,

$\exists \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x)$ – двостороння похідна.

Існує двостороння похідна в т. x, коли $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$.

Приклад.
Для функції $y=|x|$ знайти односторонні похідні в т. $x=0$.

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = |x+\Delta x| - |x|$.

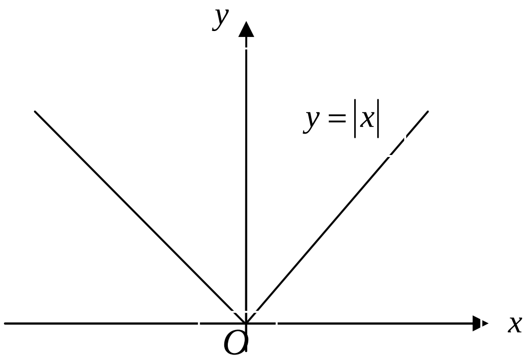
При $x=0$

$$\Delta y = |0+\Delta x| - |0| = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x > 0 \\ -\Delta x, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1; \quad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta x}{-\Delta x} = -1.$$

$f'(0+0) \neq f'(0-0)$ – геометрично в т. $x=0$ існують односторонні дотичні, двосторонньої дотичної не існує.

Точка $O(0,0)$ – кутова точка.



Односторонні похідні – дотичні збіглися з відповідними лініями.

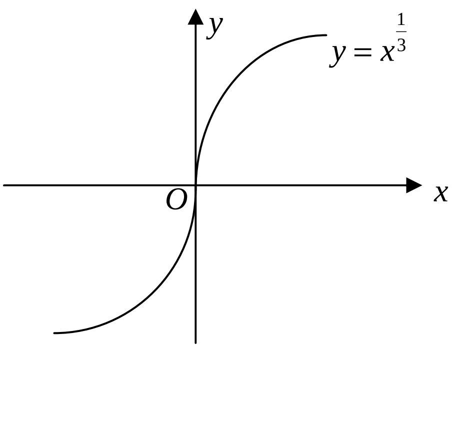
3. *Нескінченна похідна*

Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то кажуть, що в точці x існує нескінченна похідна.

Геометрично: $\exists$ дотична, паралельна або збіжна з віссю Oy, бо $tg\alpha = \infty, \ \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$.

Приклад. Функція $y = x^{\frac{1}{3}}$ в т. $x=0$ має дотичну, збіжну з віссю Oy.

Дійсно, $y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}; \quad y' = \infty$ при $x=0$.



4. *Зв'язок між існуванням скінченної похідної та неперервністю в точці* x.

Т. Якщо функція $y = f(x)$ має скінченну похідну в т. x, то вона неперервна в цій точці.

Дано: $\exists \lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = y'$ (1).

Довести: $f(x)$ неперервна в т. x, тобто $\lim\limits_{\triangle x \to o} \triangle y = 0$ (2).

З (1) $\Rightarrow \frac{\triangle y}{\triangle x} = y' + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $\triangle x \to 0$.

$$\triangle y = \underbrace{y' \cdot \triangle x}_{\substack{0\ \text{при} \\ \triangle x \to 0}} + \underbrace{\alpha(x) \cdot \triangle x}_{0\ \text{при}\ \triangle x \to 0}$$

$\lim\limits_{\triangle x \to o} \triangle y = 0$, функція неперервна в т. x.

Обернене не завжди вірно, неперервна функція в точці не завжди має скінченну похідну в цій точці. В наведених вище прикладах функції неперервні, але не мають скінченної похідної (для $y = |x|$ – односторонні похідні; для $y = x^{\frac{1}{3}}$ – нескінченна похідна).

Далі наведемо правила диференціювання та формули диференціювання, більшість з яких вивчались в школі, деякі з них будемо вивчати далі.

Правила диференціювання

Вважаємо $c = const,\ u = u(x),\ v = v(x)$

1. $c' = 0$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v';\quad (u \pm c)' = u'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';\quad (u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ v \neq 0$
6. $\left(f\left(u(x)\right)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$
7. $x'_y = \frac{1}{y'_x},\quad x = x(y)$ – обернена функція до $y = y(x)$.

Формули диференціювання

Вважаємо $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$

$$
I\begin{cases}
1.\ \left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u',\ \alpha\in R\\
2.\ \left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'\\
3.\ \left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'\\
4.\ \left(a^{u}\right)' = a^{u}\cdot \ln a\cdot u'\\
5.\ \left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'
\end{cases}
\qquad
III\begin{cases}
10.\ \left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\\
11.\ \left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\\
12.\ \left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'\\
13.\ \left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'
\end{cases}
$$

$$
II\begin{cases}
6.\ \left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'\\
7.\ \left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'\\
8.\ \left(tgu\right)' = \dfrac{1}{cos^2 u}\cdot u'\\
9.\ \left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'
\end{cases}
\qquad
IV\begin{cases}
6.\ \left(\mathrm{s}hu\right)' = chu\cdot u'\\
7.\ \left(chu\right)' = shu\cdot u'\\
8.\ \left(thu\right)' = \dfrac{1}{ch^2 u}\cdot u'\\
9.\ \left(cthu\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 u}\cdot u'
\end{cases}
$$

Виділено блоки:
I – степенева, показникові, логарифмічна функції;
II – тригонометричні;
III – обернені тригонометричні;
IV – гіперболічні.

<u>**Деякі правила та формули диференціювання**</u>

1. *Диференціювання гіперболічних функцій.*
Скористаємось означенням гіперболічних функцій:

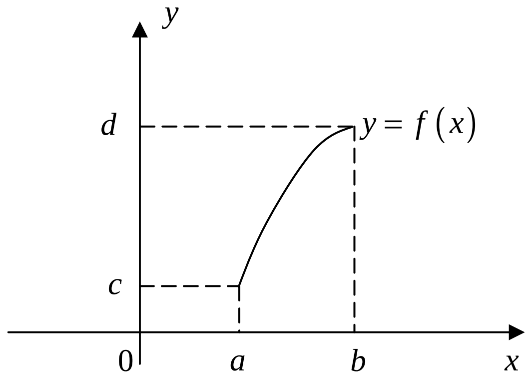
$$\left(\mathrm{ch}x\right)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x$$

$\left(\mathrm{sh}x\right)' = \mathrm{ch}x$, аналогічно.

$$\left(\mathrm{th}x\right)' = \left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)' = \frac{\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2x} = \frac{\overbrace{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}^{1}}{\mathrm{ch}^2x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$$

$\left(\mathrm{cth}x\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$, аналогічно.

2. *Диференціювання обернених функцій.*
<u>Т. 1.</u> Якщо функція $y = f\left(x\right)$ неперервна та зростаюча (спадна) на відрізку $\left[a,b\right]$, то існує обернена функція $x=\varphi\left(y\right)$, неперевна та зростаюча (спадна) на відрізку $\left[c,d\right]$, $c=\varphi\left(a\right),\ d=\varphi\left(b\right)$.
Без доведення.



Т. 2. Якщо для функції $y=f\left(x\right)$ існує обернена функція $x=\varphi\left(y\right)$, то $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ або $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$.

Д. $y'_x=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle y\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\triangle x}{\triangle y}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\triangle y\to 0}\dfrac{\triangle x}{\triangle y}}=\dfrac{1}{x'_y}$.

поміняли $\triangle x$ на $\triangle y$,
бо для неперервної функції

Приклад 1. $y=\arcsin x$. Знайти $y'=\left(\arcsin x\right)'$.

Розв'язання. $y=\arcsin x\Rightarrow x=\sin y$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\left|x=\sin y\right|=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 2. $y=\operatorname{arc}tgx$. Знайти $y'=\left(\operatorname{arc}tgx\right)'$.

Розв’язання. $y=\operatorname{arc}tgx\Rightarrow x=tgy$.

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\left|tgy=x\right|=\frac{1}{1+x^2};\ \left(\operatorname{arc}tgx\right)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

формули
тригонометрії

3. *Логарифмічна похідна. Диференціювання складної показникової функції.*

Відомо: $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

Тоді для $y=f\left(x\right)$ $\quad\left(\ln y\right)'=\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{y'}{y}$ – логарифмічна похідна від функції $y=f\left(x\right)$.

О. *Складною показниковою функцією* називається функція вигляду $y=u(x)^{v(x)}$, де $u(x)>0$.

Знайдемо $y'=\left(u(x)^{v(x)}\right)'$.

$y=u^v$ (тут x опущено).
Логарифмуємо ліву та праву частини:
$\ln y=\ln u^v$; $\ln y=v\ln u$.
Диференціюємо ліву та праву частини:
$(\ln y)'=(v\ln u)'$; $\dfrac{y'}{y}=v'\ln u+v\dfrac{1}{u}\cdot u'$, але $y=u^v$
$y'=u^v\left(v'\ln u+v\dfrac{u'}{u}\right)$.

Приклад:
Дано: $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$. Знайти: y'.
Розв'язання:
$\ln y=\ln(\sin x)^{\frac{1}{x}}$; $(\ln y)'=\left(\dfrac{1}{x}\ln(\sin x)\right)'$; $\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(\sin x)+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sin x}\cos x$
$y'=(\sin x)^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln\sin x+\dfrac{1}{x}\mathrm{c}tgx\right)$.

Диференційовність функцій

О. Функція $y=f(x)$ називається *диференційовною* в т. x, якщо її приріст Δy в цій точці може бути представлений у вигляді:
$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0$ (1), де A – деяке число, $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx.
Т. Для того, щоб функція $y=f(x)$ була диференційовна в т. x, необхідно та достатньо, щоб ця функція мала скінченну похідну в т. x і в формулі приросту функції (1) $A=f'(x)$.
Без доведення.
Отже, для диференційовної функції потрібно подання Δy у вигляді:
$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0. \quad (2)$$
Поняття: „ функція має скінченну похідну в т. x” рівносильне
„ функція диференційовна в т. x”.

Диференціал функції

Основні поняття

О. *Диференціалом* функції $y=f(x)$ в т. x називається вираз вигляду

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x. \quad (3)$$

Проаналізуємо вираз (3), порівнявши його з формулою (2).

1) $f'(x) \neq 0$. Тоді dy є головною частиною приросту функції (2), лінійною відносно Δx. Головна частина – у сенсі, що dy вносить головний вклад в Δy; лінійна частина, бо Δx в I степені.

2) $f'(x) = 0$. Тоді $dy = 0$.

Далі, нехай $y = x$. Тоді $dy = \underbrace{x'_x}_{1}\Delta x = \Delta x$.

З іншого боку, взявши диференціал від лівої та правої частини $y = x$, маємо $dy = dx$.

Отже, $\begin{matrix} dy = \Delta x \\ dy = dx \end{matrix} \Rightarrow \Delta x = dx$.

Тоді, $dy = f'(x)dx$ (4) – інша форма запису для dy.

Правила обчислення диференціалів.

Маючи таблицю похідних, можна побудувати таблицю диференціалів

$$d(\cos x) = -\sin x dx; \; d(e^x) = e^x dx; \; d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx \text{ і т.д.}$$

Правила знаходження диференціалів такі:

1) $d(c\cdot u) = cdu$, $c = \text{const}$.
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3) $d(u\cdot v) = vdu + udv$.
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \; v \neq 0$.

Інваріантність форми диференціала (незмінність)

а) Нехай $y = f(u), \; u$ – незалежна змінна

$dy = f'(u)du$, де $du = \Delta u$. (*)

б) Нехай $y = f(u), \; u = \varphi(x)$ – залежна змінна

$$dy = \underbrace{(f(u))'_x}_{\text{похідна складної функції}} dx = f'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} = f'(u)\cdot du$$

$dy = f'(u)du, \quad du = u'(x)dx$. (**)

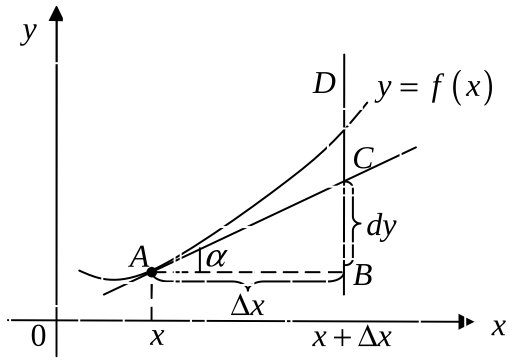
Порівняємо (*) і (**): формула для dy одна й та ж, а зміст du різний.

В цьому інваріантність форми диференціала.

Геометричний зміст диференціала

$dy = f'(x)\Delta x$ або $dy = y'\Delta x$, де $y' = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної.

Отже, $dy = tg\alpha \cdot \Delta x$



$BC = \triangle x \cdot tg\alpha = dy$ – це приріст ординати дотичної, проведеної в т. $A(x, f(x))$.
На рисунку $BD = \triangle y$. Тут $\triangle y > dy$ (функція вгнута).
Може статись, що $\triangle y < dy$ (функція опукла), $dy = dy$ – функція лінійна.

Застосування диференціала у наближених обчисленнях

$dy = y'\triangle x$
$\triangle y = y'\triangle x + o(\triangle x),\ \triangle x \to 0$
$\triangle y \approx dy$
але $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x),\ dy = f'(x)dx$
$f(x + \triangle x) - f(x) \approx f'(x)\triangle x$
$f(x + \triangle x) \approx f(x) + f'(x)\triangle x.$
Покладемо $x = x_0$
$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\triangle x$ (5) – формула для наближених обчислень.

Приклад. Обчислити $\sqrt{1,2}$.
Розв'язання:
$f(x) = \sqrt{x};\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$
$1,2 = 1 + 0,2 \Rightarrow x_0 = 1,\ \triangle x = 0,2$
$f(1) = 1,\ f'(1) = \dfrac{1}{2}$
(5)$\Rightarrow \sqrt{1,2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\cdot 0,2 = 1,1.$

Похідні вищих порядків

1.О. Нехай $y = f(x)$. Тоді $y' = f'(x) = \varphi(x)$ – похідна є функцією від x.
Похідна від похідної першого порядку – це друга похідна.
$y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$\left(y'\right)' = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\left(y''\right)' = y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

…………………………

$$\left(y^{n-1}\right)' = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Справа наведено інші позначення похідних.

1. *Формули для похідних вищих порядків від деяких функцій.*

1) $y = e^x$; $y^{(n)}$ – ? 2) $y = a^x$

$y' = y'' = \ldots y^{(n)} = e^x$. $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$,…, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

3) $y = x^m$ $y^{(n)}$ – ? $m \in N$

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

……………………………………………

$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-(n-1))x^{m-n}$ (*)

$m = n$ $y^{(n)} = n!$; $m > n$ формула (*); $m < n$ $y^{(n)} = 0$.

4) $y = \sin x$ $y^{(n)}$–?

$$y' = \cos x = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

…………………………………

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5) $y = \cos x$ $y^{(n)}$–?

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

…………………………………

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

2. *Правила знаходження похідних вищих порядків.*

1) $y = c\cdot u$, $c = const$, $u = u(x)$; $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$

2) $y = u \pm v$; $y^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

3) $y = u\cdot v$;

$y^{(n)} = (u\cdot v)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} c_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}$ (1) – формула Лейбніца,

де C_n^m – число комбінацій з n елементів по m;

$u^{(0)} = u(x)$, $v^{(0)} = v(x)$, $u^{(n-m)}$ – похідна функції u порядку $(n-m)$, $v^{(m)}$ m та похідна функції v.

Без доведення.

Формула (1) нагадує відому формулу бінома Ньютона

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{m=0}^{n}c_n^m a^{n-m}b^m$$

$a^0=1,\ b^0=1,\ a^{n-m}$ – a в степені $\left(n-m\right)$, b^m – b в степені m.

Похідні від функцій, заданих параметрично

Зауважимо, що коли $y=y\left(x\right)$, то $dy=y'dx$

$y=y\left(t\right)$, то $dy=y'_t dt$

$x=x\left(t\right)$, то $dx=x'_t dt$.

Нехай функція $y=y\left(x\right)$ задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x=x\left(t\right) \\ y=y\left(t\right) \end{cases},\quad t \text{ – параметр.}$$

Знайти $y'_x,\ y''_x,\ y'''_x$.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(y\left(t\right)\right)}{d\left(x\left(t\right)\right)}=\frac{y'_t dt}{x'_t dt}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx}=\frac{d\left(y'_x\right)}{dx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t dt}{x'_t dt}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$$

$$y'''_{xx}=\frac{d\left(y''_{xx}\right)}{dx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t dt}{x'_t dt}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \text{ і т.д.}$$

Приклад.

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\ t \text{ – параметр.}$$

Знайти $y'_x,\ y''_x$.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\sin t\right)}{d\left(\cos t\right)}=\frac{\cos t dt}{-\sin t dt}=-ctgt$$

$$y''_{xx}=\frac{d\left(y'_x\right)}{dx}=\frac{d\left(-ctgt\right)}{d\left(\cos t\right)}=\frac{-\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)dt}{-\sin t dt}=-\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Похідні функцій, заданих неявно

Нехай функція $y=y\left(x\right)$ задана неявно рівняннями:

$$F\left(x,y\right)=0. \quad (1)$$

Диференціюємо ліву та праву частини (1) по x, вважаючи, що $y=y\left(x\right)$

$$F_1\left(x,y,y'\right)=0. \quad (2)$$

З (2) знаходимо y'.

Для знаходження y'' диференціюємо ліву та праву частини (2) по x, вважаючи, що $y,\ y'$ функції від x

$$F_2\left(x, y, y', y''\right) = 0. \quad (3)$$

і т.д.

<u>Приклад.</u> Функція $y = y\left(x\right)$ задана неявно рівнянням:

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$ (1) $a = const$.

Диференціюємо ліву та праву частини (1) по x:

$2x + 2y \cdot y' = 0;\ x + y \cdot y' = 0$ (2) $\Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$.

Диференціюємо ліву та праву частини (2) по x:

$1 + y' \cdot y' + y \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\dfrac{1+y^{12}}{y}$ і т.д.

<u>Диференціали вищих порядків</u>

$y = f\left(x\right)$

$dy = f'\left(x\right)dx,\ dx = \vartriangle x$

$$dy = d\left(dy\right) = d\left(f'\left(x\right)dx\right) = dxd\left(f'\left(x\right)\right) = dx \cdot f''\left(x\right)dx = f''\left(x\right)\left(dx\right)^2 = f''\left(x\right)\left(dx\right)^2$$

$dx = const$

константу винести

(прийнято писати не $\left(dx\right)^2$, а dx^2)

$d^2y = f''\left(x\right)dx^2$

$d^3y = d\left(d^2y\right) = f''\left(x\right)dx^3$

……………………………………

$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}\left(x\right)dx^n$.

З отриманих співвідношень маємо:

$$f'\left(x\right) = \frac{dy}{dx},\ f''\left(x\right) = \frac{d^2y}{dx^2},\ f'''\left(x\right) = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, f^{(n)}\left(x\right) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Це збігається з введеними раніше позначеннями похідних.

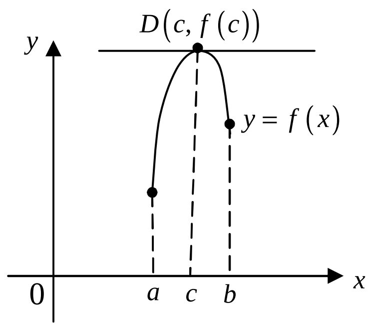
<u>Деякі теореми про диференційовні функції</u>

<u>Теорема Ферма</u> (фр. математик).

Якщо функція $y = f\left(x\right)$

1) неперервна на відрізку $\left[a, b\right]$,
2) диференційовна на інтервалі $\left(a, b\right)$,
3) на інтервалі $\left(a, b\right)$ приймає найбільше або найменше значення, то існує така точка $c \in \left(a, b\right)$, що $f'\left(c\right) = 0$.

Без доведення.
Геометрично:



$f'(c)=0 \Rightarrow$ дотична, проведена в т. $D(c, f(c))$ до кривої, паралельна осі Ox.

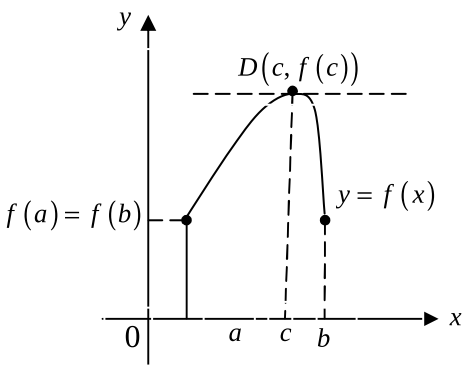
Теорема Ролля (фр. математик).

Якщо функція $f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a,b]$,
2) диференційовна на інтервалі (a,b),
3) $f(a)=f(b)$,

то існує така точка $c \in (a,b)$, що $f'(c)=0$.

Без доведення.
Геометрично:



За умов теореми $f'(c)=0 \Rightarrow$ дотична, проведена в т. $D(c, f(c))$ до кривої, паралельна осі Ox.

Теорема Коші (фр. математик).

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють умови:

1) неперервні на відрізку $[a,b]$,
2) диференційовні на інтервалі (a,b),
3) $g'(x) \neq 0$ на інтервалі (a,b),

то існує така точка $c \in (a,b)$, що виконується рівність:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$ (1) – формула Коші.

Без доведення. Без геометричної інтерпретації (дуже складна).

Теорема Лагранжа (фр. математик).

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$,
2) диференційовна на інтервалі (a,b),

то існує така точка $c\in(a,b)$, що виконується рівність:

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (2) – формула Лагранжа.

Доведення. Випливає з формули (1)

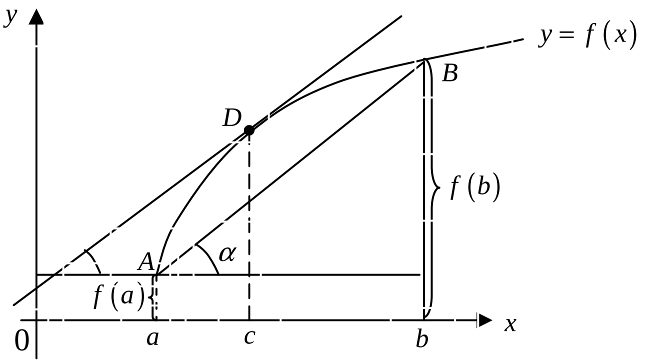
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

в якій покладемо $g(x)=x$.

Тоді $g(a)=a;\ g(b)=b;\ g'(x)=1\Rightarrow g'(c)=1$.

Підставимо:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).\quad (*)$$



$\exists$ така т. $c\in(a,b)$, що дотична, проведена в т. $D(c, f(c))$ до кривої $y=f(x)$, паралельна січній AB.

Розкриття невизначеностей (правило Лопіталя)

(Лопіталь – фр. математик.)

I. *Невизначенність типу* $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}\right)$.

Т.1. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють такі умови:

1) умови теореми Коші в деякому околі т. $x=a$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0,$

3) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, тоді існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, при цьому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Без доведення.

Зауваження:

1) число a, що присутнє в теоремі, може бути або скінченним, або $\pm\infty$,
2) під існування границі $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ розуміють скінченну границю, або нескінченність з зазначеним знаком: $+\infty$ чи $-\infty$,
3) можливе повторне застосування вказаного в теоремі правила (правила Лопіталя).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x^2 + x^5}{4x - x^4} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{1}{\cos x} - \overset{0}{2x} + \overset{1}{5x^4}}{4 - \underset{0}{4x^3}} = \dfrac{1}{4}.$

взяли похідну від чисельника
і знаменника

Існують приклади, коли правило Лопіталя незастосовне.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}+x^5}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

– ця границя не існує.

З цього робимо висновок, що треба застосувати звичайні методи, а саме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{0}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{обмежена}}=0.$$

II. *Невизначеність типу* $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ – $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}\right)$.

Для такого типу невизначеності має місце теорема, аналогічно теоремі 1 в п. I і зауваження до неї.

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\left\{\frac{2}{\infty}\right\}=0.$$

Іноді правило Лопіталя застосовувати незручно (громіздко), а вивчені раніше методи дають результат швидко.

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-2x+1}{3x^4+5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}.$$

За правилом Лопіталя треба було 4 рази його застосовувати.

III. *Невизначеність типу* $\{0\cdot\infty\}$ – $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\{0\cdot\infty\}\right)$.

Ця невизначеність зводиться до $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ шляхом перетворень.

Врахуємо, що $f\to 0,\ \varphi\to\infty,\ x\to a$

$$f\cdot\varphi=\frac{f}{\frac{1}{\varphi}}\Rightarrow\left\{\frac{0}{0}\right\},\quad f\cdot\varphi=\frac{\varphi}{\frac{1}{f}}\Rightarrow\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\to 1}=1.$$

IV. *Невизначеність типу* $\{\infty-\infty\}$ – $\lim\limits_{x\to a}[f-\varphi]=\{\infty-\infty\}$.

Виконаємо перетворення:

$$f-\varphi=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi}}=\frac{\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{1}{f}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to1}x=-1.$$

V. *Степеневі невизначеності* $\{1^\infty\},\ \{\infty^0\},\ \{0^0\}$ – $\left(\lim\limits_{x\to a}f^g\right)$.

Кожна з цих невизначеностей зводиться до $\{0\cdot\infty\}$, яка зводиться до $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Наприклад, для $\{1^\infty\}$:

$$f^g=e^{\ln f^g}=e^{g\ln f};\quad \lim_{x\to a}g\cdot\ln f=\{\infty\cdot 0\}\ \text{бо}\ g\to\infty,\ f\to 1,\ \ln 1=0.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \{1^{\infty}\} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}} = e^{A};$$

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$$

Зауважимо, що правило Лопіталя застосовують в комбінації з використанням еквівалентних нескінченно малих.

Формула Тейлора для многочлена

Відомо, що многочлен $P_n(x)$ може бути подано у двох формах:

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ – розкладання за степенями x

або

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ (1) – розкладання за степенями $(x-a)$.

Тут a_k, a – деякі числа.

Має місце формула: $P_n^{(k)}(a) = k!a_k$ (2) $\Rightarrow a_k = \dfrac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$.

Підставимо a_k в (1):

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ (3) – формула Тейлора для многочлена.

При $a = 0$

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k$ (4) – формула Маклорена.

Доведення формули (2).

Запишемо $P_n(x),\ P_n'(x),\ P_n''(x),\dots,P_n^{(n)}(x)$

і $P_n(a),\ P_n'(a),\ P_n''(a),\dots,P_n^{(n)}(a)$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n$$

$$P_n(a) = a_0$$

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n'(a) = a_1$$

$$P_n''(x) = 2!a_2 + 3\cdot 2a_3(x-a) + \dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$

$$P_n''(a) = 2!a_2$$

- -

$P_n'''(a) = 3!a_3$.

$P^{(n)}(a) = n!a_n \Rightarrow a_k = \dfrac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$.

Формула Тейлора для довільної функції

Запишемо формально многочлен $P_n(x)$ для довільної функції $f(x)$.

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. (5)

Можна перевірити аналогічно попередньому, що

$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),\ k = \overline{0,n}$. (6)

Тоді в околі точки $x = a$ маємо:

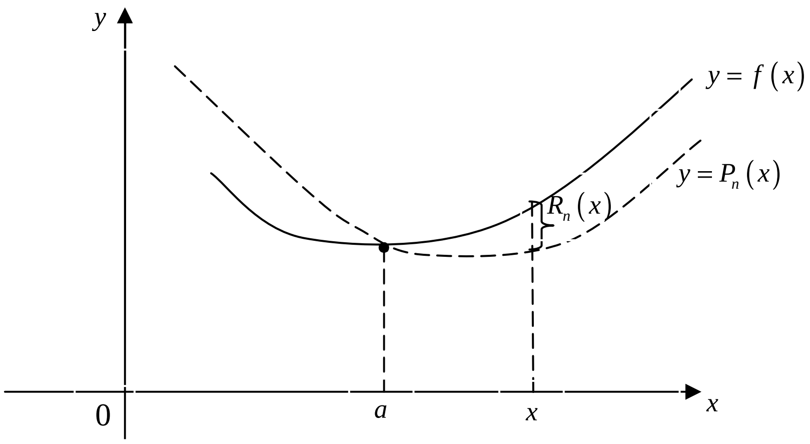
$f(x) \approx \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Тоді $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$, (7)

де $R_n(x)$ називається залишковим членом.

$f(x) = P_n(x) + R_n(x);\ f(a) = P_n(a),\ R_n(a) = 0,\ R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Геометрично:



$R_n(x)$ означає похибку в т. x, коли $f(x)$ – замінена многочленом. В самій точці $x = a$ похибка дорівнює 0.

При $a = 0$

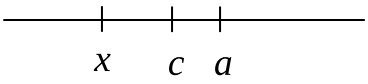
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$ (8) – формула Маклорена.

Залишковий член в формулі Тейлора може бути записаний у різних формах:

$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right),\ x \to a$ – у формі Пеано,

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ – у формі Лагранжа.

Тут c лежить між x та a.
Без доведення.



Розкладання деяких функцій по формулі Маклорена

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x).$$

1. $y=e^x$

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)$$

2. $y=\sin x$

$$y^{(k)}=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ y^{(k)}(0)=\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0,\quad y'''(0)=-1,\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+R_n(x)$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_n(x).$$

3. $y=\cos x$

$$y^{(k)}=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ y^{(k)}(0)=\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-1,\quad y'''(0)=0,\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+R_n(x)$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_n(x).$$

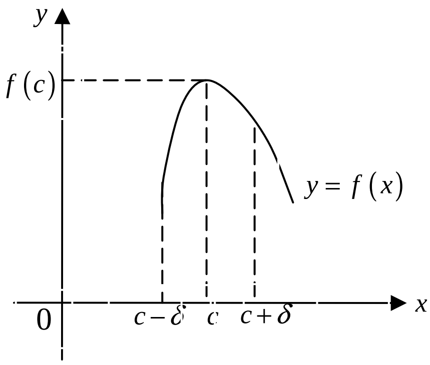
Дослідження функцій та побудова графіків

1. *Зростання та спадання функцій.*

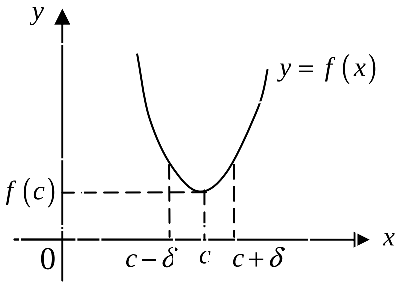
   $f'(x)>0$ на $(a,b)\Rightarrow$ функція зростає на (a,b),

   $f'(x)<0$ на $(a,b)\Rightarrow$ функція спадає на (a,b).

2. *Екстремуми функцій.*



Локальний максимум: $f(x) \le f(c)$, $\forall x \in O(c,\delta)$ – окіл точки c радіуса δ .



Локальний мінімум: $f(x) \ge f(c)$ $\forall x \in O(c,\delta)$.

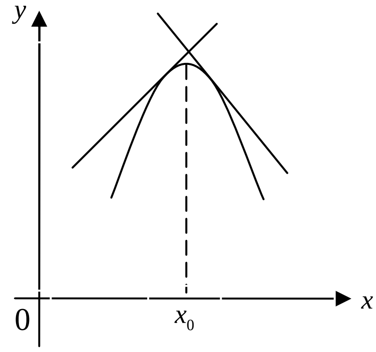
<u>Т.1.</u> Необхідна умова екстремуму: якщо функція $f(x)$ диференційовна в т. x_0 і досягає в цій точці локального екстремуму, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в яких $f'(x_0) = 0$, називаються стаціонарними.

Точки, в яких $f'(x_0) = 0, \infty$ або не існує називаються критичними точками І роду.

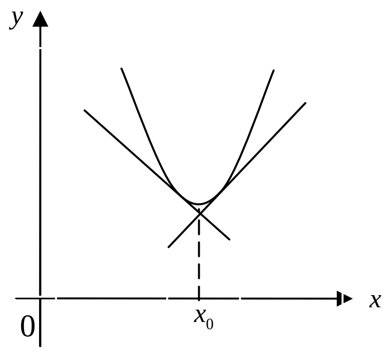
<u>Т.2</u>. Достатня умова екстремуму: нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$.

Якщо при переході через цю точку зліва направо $f'(x)$ змінює знак з «+» на «–», то в точці $x = x_0$ функція досягає максимуму; якщо ж $f'(x)$ змінює знак з «–» на «+», то в точці $x = x_0$ функція досягає мінімуму.



$f'(x) > 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$

(з "+" на "-")
т.x_0 – т.max



$f'(x) < 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$

(з "-" на "+")
т.x_0 – т.min

<u>Т.3.</u> Достатні умови екстремуму: нехай $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \ne 0$.

Тоді,

1) якщо $f''(x_0) > 0$, то т. x_0 – т. локального мінімуму;

2) якщо $f''(x_0) < 0$, то т. x_0 – т. локального максимуму.

<u>Д.</u> Використовується формула Тейлора, в якій обмежуються похідними 2-го порядку. Залишковий член береться в формі Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{\underbrace{1!}_{=0,\text{ бо т. } x_0 \text{ - стаціонарна}}}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \quad (x - x_0)^2 > 0 \quad (*).$$

1) $f''(x) > 0 \Rightarrow f''(c) > 0$, права частина в (*) ≥ 0

$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad f(x) \geq f(x_0)$ – т. x_0 – т. лок. min

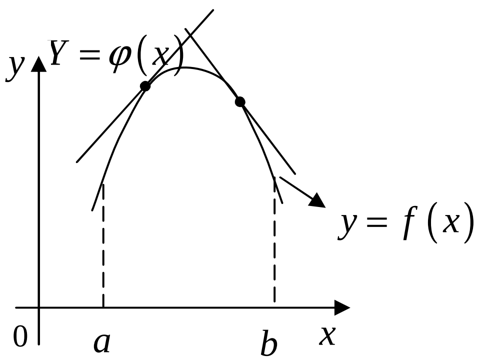
2) $f''(x) < 0 \Rightarrow f''(c) < 0$

$f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad f(x) \leq f(x_0)$ – т. x_0 – т. лок. max.

3. *Опуклість, вгнутість, точки перегину.*

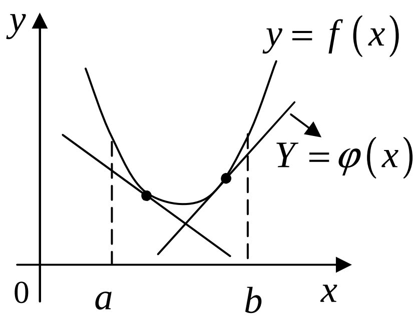
Вважаємо, що на інтервалі (a,b) графік функції $y = f(x)$ не має дотичної, паралельної осі Oy.

Рівняння дотичної $Y = \varphi(x)$. Проведемо до графіка функції дотичні:



$f(x) - Y < 0$

Графік функції опуклий, якщо він розташований нижче будь-якої своєї дотичної.



$f(x) - Y > 0$

Графік функції вгнутий, якщо він розташований вище будь-якої своєї дотичної.

<u>Т</u>. Якщо $f''(x) < 0$ на (a,b), то графік функції $f(x)$ опуклий на (a,b).

Якщо $f''(x) > 0$ на (a,b), то графік функції $f(x)$ вгнутий на (a,b).

Доведення. Нехай $x_0 \in (a,b)$.

Скористаємось формулою Тейлора, обмежившись похідними 2-го порядку

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \ c \in (a,b).$$

Рівняння дотичної:

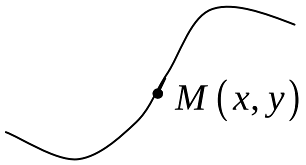
$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – відомо

$$f(x) - Y = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \ (x - x_0)^2 > 0.$$

1) $f''(x) < 0$; тоді $f(x) - Y < 0 \Rightarrow$ графік опуклий на (a,b),

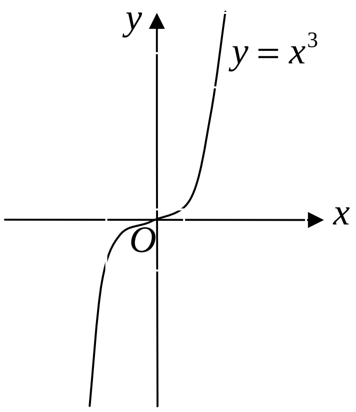
2) $f''(x) > 0$; тоді $f(x) - Y > 0 \Rightarrow$ графік вгнутий на (a, b).

<u>О.</u> Точка, яка з'єднує опуклу і вгнуту частину графіка, називається <u>точкою перегину</u> («перегиба» рос.).



Точку перегину слід шукати серед тих точок, де $f''(x) = 0, \infty$ або не існує. Ці точки називаються критичними точками II роду.

<u>Приклад.</u> $y = x^3$



$y' = x^3$ $\quad y'' = 3x^2 \quad y'' = 6x = 0$, $x = 0$ – критична точка II роду.

$y'' > 0$, коли $x > 0$ – вгнутість, $x > 0$, $y'' < 0$, коли $x < 0$ – опуклість, $x < 0$.

Точка $O(0,0)$ – точка перегину.

4. *Асимптоти графіка функції.*

<u>О</u>. Пряма l називається асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо, коли $M \to \infty$, $M \in$ графіку функції $f(x)$, відстань $\rho(M, l) \to 0$.

Розрізняють вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти.

$x = a$ – вертикальна асимптота

$y = b$ –горизонтальна асимптота

$y = kx + b$ – похила асимптота

1) $x = a$ – *вертикальна* асимптота, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

2) Пряма $y = kx + b$ є *похилою* асимптотою для функції $f(x)$, якщо при $x \to \pm\infty$ функція $f(x)$ подається у вигляді $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

<u>Т.</u> Для того, щоб функція $f(x)$ мала похилу асимптоту $y = kx + b$, необхідно та достатньо, щоб існували скінченні границі:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ (1), $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = b$ (2).

Без доведення.

Отже, для знаходження похилої асимптоти, знаходимо границі (1), (2). Якщо вони обидві скінченні записуємо

$$y = kx + b.$$

3) Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої, при $k = 0$, тобто

$$y = b.$$

Загальна схема дослідження функцій

1. Вказати область визначення.
2. Дослідити на парність, непарність, періодичність.
3. Знайти точки перетину графіка з осями координат.
4. Знайти асимптоти графіка.
5. Знайти інтервали зростання, спадання, екстремуми.
6. Знайти інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину.

На основі досліджень будуємо графік.