

## Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

### Тема 3.1. Невизначений інтеграл

#### Первісна. Означення. Властивості

Відомо, як розв'язується така задача:

дана функція  $F(x)$ ; знайти похідну  $F'(x) = f(x)$ .

Обернена задача:

Дана функція  $f(x)$ ; знайти таку функцію  $F(x)$ , щоб  $F'(x) = f(x)$ .

Тобто,  $(?)' = f(x)$ .

**Приклад.** Нехай  $f(x) = x^4$ . Знайти  $F(x)$ .

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + C, \text{ бо } \left( \frac{x^5}{5} + C \right)' = x^4.$$

О. Функція  $F(x)$  називається *первісною* («первообразной» рос.) для функції  $f(x)$  на проміжку  $(a, b)$ , якщо

$$F'(x) = f(x) \text{ для } \forall x \in (a, b)$$

Мають місце властивості:

1<sup>0</sup>. Якщо  $F(x)$  первісна для функції  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то  $F(x) + C$  - також первісна для  $f(x)$  на  $(a, b)$ .

2<sup>0</sup>. Якщо  $F_1(x), F_2(x)$  - дві первісні для функції  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то

$F_1(x) - F_2(x) = C$ , тобто різниця двох первісних для функції  $f(x)$  є константою.

Без доведення.

#### Невизначений інтеграл. Означення. Властивості

О. *Невизначеним інтегралом* від функції  $f(x)$  на проміжку  $(a, b)$  називається сукупність первісних  $F(x) + C$  для функції  $f(x)$  на цьому проміжку, де  $C$  - довільна стала, а функція  $F(x)$  така, що  $F'(x) = f(x)$ .

Позначення невизначеного інтеграла:  $\int f(x) dx$ .

Отже, за означенням

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1), \text{ де } F'(x) = f(x). \quad (2)$$

$$\text{Тоді } \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, \quad \text{бо } \left( \frac{x^5}{5} \right)' = x^4;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \text{бо } (\sin x)' = \cos x;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C, \text{ бо } (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Мають місце *власності*:

$$1^0. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$\underline{\text{Д.}} \left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

$$2^0. d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$\underline{\text{Д.}} d \left( \int f(x) dx \right) = \left( \int f F(x) dx \right)' \cdot dx = f(x) \cdot dx$$

$$3^0. \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$4^0. \int d(f(x)) = \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$5^0. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a \square \text{ число.}$$

$$6^0. \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

$$7^0. \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, (*)$$

де  $F(ax)$  - первісна для  $f(ax)$ ,  $a$  - деяке число.

Д. Візьмемо похідну від правої частини (\*) і доведемо, що вона дорівнює підінтегральній функції  $f(ax)$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{a} F(ax) + C \right)'_x &= \frac{1}{a} \underbrace{(F(ax))'_{ax} \cdot (ax)'_x}_{\text{як похідна складної функції}} = \frac{1}{a} (F(ax))'_{ax} \cdot a = \\ &= (F(ax))'_x = f(ax), \text{ бо за умовою } F(ax) \text{ первісна для } f(ax). \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$8^0. \int f(x+b) dx = F(x+b) + C,$$

де  $F(x+b)$  первісна для  $f(x+b)$ ,  $b$  - деяке число.

$$9^0. \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

де  $F(ax+b)$  первісна для  $f(ax+b)$ ,  $a, b$  - деякі числа.

### Основна таблиця інтегралів

Степенева і показникова функції

$$\begin{cases}
 1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \\
 1.a) \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C \quad (\alpha = 0 \text{ в формулі 1.}) \\
 2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \\
 3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 4. \int e^x dx = e^x + C
 \end{cases}$$

Тригонометричні функції

$$\begin{cases}
 5. \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 6. \int \cos x dx = \sin x + C \\
 7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
 8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C
 \end{cases}$$

Обернені тригонометричні функції

$$\begin{cases}
 13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
 14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \\
 15. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \\
 16. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C
 \end{cases}$$

Деякі інтеграли від тригонометричних функцій

$$\begin{cases}
 20. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C \\
 21. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C \\
 22. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} x \frac{x}{2} \right| + C \\
 23. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C
 \end{cases}$$

Гіперболічні функції

$$\begin{cases}
 9. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \\
 10. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \\
 11. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \\
 12. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C
 \end{cases}$$

Деякі часто вживані інтеграли

$$\begin{cases}
 17. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \\
 18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \\
 19. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C
 \end{cases}$$

Правильність формул можна перевірити диференціюванням лівої частини, тобто використовуючи означення.

Багато запам'ятати перші 19 формул.

Можна користуватись формулами 20-23, не витрачаючи часу на інтегрування.

## Методи знаходження невизначених інтегралів

### Метод заміни змінної

Г. Нехай

а) функція  $f(x)$  неперервна на  $(a, b)$

б) функція  $x = \varphi(t)$  неперервна і диференційовна на  $(c, d)$

в) функція  $x = \varphi(t)$  має обернену функцію  $t = \phi(x)$ , яка є диференційовною.

Тоді має місце формула:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \quad (1)$$

в якій після взяття інтеграла справа покласти  $t = \phi(x)$ .

Д. Візьмемо похідні по  $x$  від лівої та правої частини формули (1)

$$\left( \int f(x) dx \right)'_x = f(x)$$

$$\begin{aligned} \left( \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left( \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot t'_x = \left| t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)} \right| = \\ &= f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = \left| \begin{array}{l} t = \phi(x) \\ x = \varphi(t) \end{array} \right| = f(x). \end{aligned}$$

Праві частини однакові, отже і ліві рівні.

Це означає, що формула (1) вірна з точністю до довільної сталої.

Формула заміни змінної застосовується у вигляді:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Після взяття інтеграла покласти  $t = \phi(x)$ , тобто повернутись до старої змінної.

**Приклад.** Знайти інтеграл, використовуючи заміну змінної

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \left| \begin{array}{l} x = a \cdot t \\ dx = a dt \\ t = \frac{x}{a} \end{array} \right| = \int \frac{a dt}{a^2 + a^2 t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctgt} + C = \\ &= \left| t = \frac{x}{a} \right| = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

### Метод підведення під знак диференціала

Метод є частинним випадком методу заміни змінної і базується на властивості інваріантності (незмінності) формули інтегрування відносно змінної інтегрування. На прикладах це виглядає так:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C; \quad \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C; \quad \int \ln^2 d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Формула застосована одна й таж, а змінні різні.

Формула для методу підведення під знак диференціала:

$$\int f[\varphi(x)] d(\varphi(x)) = F[\varphi(x)] + C, \quad (3)$$

де  $F[\varphi(x)]$  - первісна для функції  $f[\varphi(x)]$ .

Переваги методу: після взяття інтеграла не треба переходити до старої змінної.

### Приклади.

$$1. \int \sin^4 x \cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

$$2. \int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left| d(\ln x) = \frac{dx}{x} \right| = \int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

$$3. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2 + 1) = 2x dx \\ x dx = \frac{d(x^2 + 1)}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$4. \int x(5x^2 + 7)^6 dx = \left| \begin{array}{l} d(5x^2 + 7) = 10x dx \\ x dx = \frac{d(5x^2 + 7)}{10} \end{array} \right| = \frac{1}{10} \int (5x^2 + 7)^6 d(5x^2 + 7) = \\ = \frac{1}{10} \cdot \frac{(5x^2 + 7)^7}{7} + C.$$

### Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

Т. Нехай функція  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$  диференційовні, тоді має місце формула:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \quad (1)$$

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами.

Доведення. Відомо, що

$$d(u \cdot v) = v du + u dv.$$

Проінтегруємо ліву та праву частину:

$$\int d(u \cdot v) = \int v du + \int u dv$$

$$\int d(u \cdot v) \Rightarrow u \cdot v + C = \int v du + \int u dv$$

$$\int u dv = uv + C - \int v du$$

Константу  $C$  опускаємо, тобто приймає  $C = 0$ , бо довільна стала буде присутня після взяття інтеграла справа  $\int v du$ .

$$\text{Маємо: } \int u dv = u \cdot v - \int v du. \quad (1)$$

Зауваження. Труднощі в застосуванні формули (1) полягають у тому, що як правило задається інтеграл для обчислення у вигляді  $\int f(x) dx$ , а не  $\int u dv$ .

Тому виникає дві задачі:

1. Звести  $\int f(x) dx$  до вигляду  $\int u dv$
2. Обчислити  $\int u dv$  за формулою. (1)

Розв'язання задачі 1 полягає в тому, щоб визначитись, що прийняти за  $u$ , а що за  $dv$ . Як правило, за  $u$  приймається множник, який спрощується від диференціювання.

Існують рекомендації щодо такого вибору.

Існують спеціальні класи інтегралів, для яких застосовують вказаний метод.

Наведемо деякі такі класи функцій з вказанням, що приймається за  $u$  та  $dv$ .

$$1) \underbrace{\int P_n(x)}_u \underbrace{\cos mx dx}_{dv}, \quad \underbrace{\int P_n(x)}_u \underbrace{\sin mx dx}_{dv}, \quad \underbrace{\int P_n(x)}_u \underbrace{e^{mx} dx}_{dv}$$

Тут  $P_n(x)$  - многочлен степеня  $n$ ,  $n, m$  - задані числа.

$$2) \underbrace{\int P_n(x)}_u \underbrace{\arctg mx dx}_{dv}, \quad \underbrace{\int P_n(x)}_u \underbrace{\arcsin mx dx}_{dv}, \quad \underbrace{\int P_n(x)}_u \underbrace{\ln x dx}_{dv}$$

$$3) \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx.$$

Тут немає значення, що приймати за  $u$ , двічі застосовується метод інтегрування частинами, в результаті чого приходимо до рівняння відносно шуканого інтеграла.

Метод інтегрування частинами може застосовуватись повторно, наприклад для інтегралів

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int x^3 \sin x dx \quad \text{та інших.}$$

Розглянемо приклади, на яких проілюструємо схему застосування методу, що розглядається.

### Приклади.

$$1. \int x e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^{5x} dx; \quad v = \int e^{5x} dx = \left| d(5x) = 5dx \right| = \left| \int u dv = u \cdot v - \int v du \right| = \\ = \frac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + \text{C} \end{array} \right| = 0 \text{ (завжди, бо шукаємо одну функцію } v, \text{ а не сукупність)}$$

$$= x \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + C$$

$$2. I = \int \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x; \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx; \quad v = \int dx = x \end{array} \right| = \left| \int u dv = u \cdot v - \int v du \right| =$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} d(1+x^2) = 2x dx \\ x dx = \frac{d(1+x^2)}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$I = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

### Деякі вибрані питання

#### Комплексні числа

#### Основні поняття

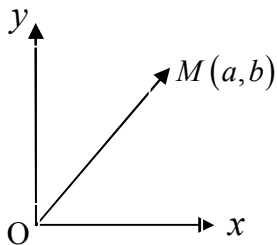
О.1. Комплексним числом називається вираз вигляду  $z = a + bi$ , де  $a$  та  $b$  - дійсні числа,  $i$  - уявна одиниця, яка задовольняє умову  $i^2 = -1$ . Число  $a$  називається дійсною частиною комплексного числа. Пишуть  $a = \operatorname{Re} z$  (перші дві літери **Real** - дійсний франц.). Число  $b$  називають уявною частиною комплексного числа. Пишуть  $b = \operatorname{Im} z$  (перші дві літери **Imaginaire** - уявний франц.).

Кажуть, що комплексне число

$$z = a + bi \quad (1)$$

записане в алгебраїчній формі.

На площині комплексне число зображується точкою або вектором



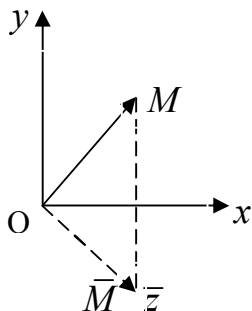
$$z \Leftrightarrow M(a, b)$$

Числу  $z$  відповідає т.  $M(a, b)$  або вектору  $\overrightarrow{OM}$  і,  $z \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$

навпаки, точці або вектору відповідає число  $z$ .

О.2. Число  $z = a - bi$  називається спряженим по відношенню до числа  $z = a + bi$

Геометрично:



$$M(a, b)$$

$$\bar{M}(a, -b)$$

### Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі

Нехай  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

$$1. z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$2. z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$3. z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

$$4. \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} =$$

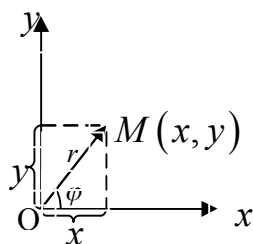
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практиці формули не запам'ятовують, а запам'ятовують ідею їх отримання.

### Тригонометрична форма комплексного числа

Зобразимо комплексне число  $z = x + iy$  (1) на площині  $xOy$ .



$r, \varphi$  - полярні координати точки  $M$

$$r = |\overline{OM}|$$

$$\varphi = (\text{Ox}, \wedge \overline{OM})$$

З рисунку:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

Числа  $r$  і  $\varphi$  називаються модулем і аргументом комплексного числа.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (4)$$

Значення аргументу  $\varphi$  визначається з формули (4) з урахуванням того, в якій чверті знаходиться точка  $M$ . Аргумент визначається з точністю до доданка  $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Якщо  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , то значення  $\varphi$  називають головними значеннями аргументу і позначають  $\varphi = \arg z$ .

Підставимо (2) в (1) і отримаємо:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Формула (3) задає комплексне число  $z$  в тригонометричній формі.



Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі

Нехай  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$

$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$1. z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 \cdot r_2 = \left[ \underbrace{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \underbrace{(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)}_{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

(при множині модулі перемножуються, а аргументи додаються)

2.  $z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$ ;  $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n$$

$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$  - формула Муавра (Муавр – англ. математик).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ = \frac{r_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}{\underbrace{\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2}_{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1}};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

При діленні  $\frac{z_1}{z_2}$  модулі діляться, аргументи віднімаються.

4.  $\sqrt[n]{z}$ ;  $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho (\cos \psi + i \sin \psi)$$

Де  $\rho, \psi$  □ треба визначити.

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Піднесемо до  $n$  □го степеня ліву та праву частини

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Маємо рівність двох комплексних чисел, з чого випливає рівність їх модулів, аргументи відрізняються на  $2k\pi$ .

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Отже

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Тут покладено  $k = \overline{0, n-1}$ , бо доведено, що тільки при цих значеннях  $k$  отримуємо  $n$  різних значень кореня. При інших значеннях  $k$  значення коренів повторюється за рахунок присутності доданку  $2k\pi$ .

### Показникова форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Має місце формула Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Без доведення.

Тоді

$$z = r \cdot e^{i\varphi} - \text{показникова форма комплексного числа.}$$

Тоді нехай  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ :

$$1. z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$3. z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$4. \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

### Зауваження

Комплексні числа виникають, наприклад, при розв'язанні алгебраїчних рівнянь.

**Приклад 1.** Знайти корені рівняння.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1} = x \quad x_{1,2} = \pm i$$

**Приклад 2.** Знайти корені рівняння:

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3; \quad \sqrt{D} = \sqrt{-3} = \underbrace{\sqrt{3}}_i \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{3}$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зауважимо:

1. Рівняння має стільки коренів, дійсних або комплексних, який степе́нь цього рівняння;
2. Комплексні корені рівняння є комплексно-спряженими.  
у прикладі 1:  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -i$

у прикладі 2:  $x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Тобто маємо пари комплексно-спряжених коренів.

3. Задані рівняння є рівняннями з дійсними коефіцієнтами, а серед коренів є комплексні:

4. Розкладання відповідних многочленів на множники, враховуючи відому формулу:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , де  $x_1, x_2$  - корені відповідного рівняння, виглядає так:

$$x^2 + 1 = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i)$$

$$x^3 - 1 = (x - i) \left( x - \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \cdot \left( x - \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = (x - i)(x^2 + x + 1).$$

### Розкладання многочлена на множники

Нехай задано многочлен  $n$ -го степеня

$$P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n.$$

Розглядаємо відповідне рівняння

$$P_n(x) = 0.$$

Воно має  $n$  коренів. Нехай ці корені  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Якщо всі корені дійсні, різні, то вони називаються простими або такими, що мають кратність  $k = 1$ .

Якщо серед цих коренів є однакові, то вони називаються кратними, їх кратність  $k_i$ .

Якщо серед цих коренів є комплексні, то вони в цю множину коренів входять парами, наприклад  $a_1 = \alpha + i\beta$ ,  $a_2 = \alpha - i\beta$ .

У розкладанні цього многочлена на множники будуть присутні множники  $(x - a_1)$  та  $(x - a_2)$ .

Знайдемо вираз для добутку

$$\begin{aligned} (x - a_1)(x - a_2) &= (x - (\alpha + i\beta)) \cdot (x - (\alpha - i\beta)) = ((x - \alpha) - i\beta) \cdot ((x - \alpha) + i\beta) = \\ &= (x - \alpha)^2 - (i\beta)^2 = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = \\ &= \left. \begin{array}{l} -2\alpha = p \\ \alpha^2 + \beta^2 = q \end{array} \right\} = x^2 + px + q. \end{aligned}$$

Зазначимо тепер, що в розкладанні многочлена на множники, залежно від характеру коренів многочлена, присутні такі вирази:

а)  $(x - a_1)$ , якщо  $a_1$  - дійсний корінь кратності  $k = 1$  (простий);

б)  $(x - a_1)^{\alpha_1}$ , якщо  $a_1$  - дійсний корінь кратності  $k = \alpha_1$ ;

в)  $(x^2 + px + q)$ , якщо  $a_1, a_2$  - комплексно-спряжені корені кратності  $k = 1$  (кратності)

г)  $(x^2 + px + q)^{\beta_1}$ , якщо  $a_1, a_2$  - комплексно-спряжені корені кратності  $k = \beta_1$ .

Для визначеності покладемо в формулі (1)  $b_0 = 1$

$$P_n(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n.$$

Розкладання многочлена на множники виглядає так:

$$P_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x - a_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{\alpha_k} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (1)$$

де  $a_i, p_j, q_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, s}$  - дійсні числа;

$\alpha_j, \beta_j, j = \overline{1, s}$  - натуральні числа, які вказують на кратність відповідних коренів многочлена;

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + 2\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_s = n,$$

$n$  - степінь многочлена.

Формула (1) означає, що многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на лінійні та квадратичні множники.

Лінійні множники відповідають дійсним кореням рівняння, квадратичні – комплексним.

### Раціональні дробі (дробово-раціональні функції)

Q. Раціональним дробом називається функція вигляду  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ , де  $Q_m(x)$  та  $P_n(x)$

многочлени степенів  $m$  та  $n$  відповідно.

Якщо  $m < n$ , то раціональний дріб називається *правильним*.

Якщо  $m \geq n$ , то раціональний дріб називається *неправильним*.

Якщо раціональний дріб неправильний, то шляхом ділення можна виділити цілу та дробову частини.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \underbrace{R_{m-n}(x)}_{\substack{\text{ціла частина} \\ \text{(многочлен)}}} + \frac{T_{m_1}(x)}{\underbrace{P_n(x)}_{\substack{\text{правильний} \\ \text{раціональний дріб}}}}, \quad m_1 < n.$$

Нехай  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$  - правильний раціональний дріб.

Серед цих дробів виділяються 4 типи дробів, які називаються найпростішими.

$$\text{I тип: } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II тип: } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad k > 1,$$

$$\text{III тип: } \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \text{IV тип: } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \quad k > 1.$$

$B, C, p, q$  - дійсні числа;

многочлен  $x^2 + px + q$  - має комплексні корені, тобто  $D = p^2 - 4q = \frac{p^2}{4} - q < 0$ .

### Розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів

Г. Будь-який правильний раціональний дріб  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ ,  $m < n$  може бути представлений у

вигляді суми найпростіших дробів.

Без доведення.

Пояснення.

Нехай  $P_n(x)$  подано у вигляді (1).

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} &= \frac{Q_m(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x-a_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} = \\ &= \frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{B_1}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \frac{B_2}{(x-a_k)^{\alpha_k-1}} + \dots + \frac{B_{\alpha_k}}{(x-a_k)} + \\ &+ \frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{C_{\beta_1}x+D_{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{E_1x+F_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{E_{\beta_s}x+F_{\beta_s}}{(x^2+p_sx+q_s)}. \quad (3) \end{aligned}$$

Тут  $A_i, \dots, B_i, C_i, D_i, \dots, E_i, F_i$  - деякі числа (коефіцієнти, які треба визначити).

Знаходження вказаних коефіцієнтів засноване на зведенні (3) до рівності двох многочленів, яку отримаємо звівши вираз в (3) справа до спільного знаменника, та опустивши цей знаменник (спільним знаменником є  $P_n(x)$ )

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{T_{m_1}(x)}{P_n(x)} \Rightarrow Q_m(x) = T_{m_1}(x), \quad (4)$$

$\xrightarrow{\text{опустили знаменник}}$

тут  $Q_m(x)$  має задані коефіцієнти,

$T_{m_1}(x)$  має вказані коефіцієнти, які треба визначити.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використовують методи:

1. *Метод задання частинних значень.*

У співвідношенні (4) надаємо  $x$  деякі числові значення (як правило це дійсні корені многочлена  $P_n(x)$  - знаменника дробу).

Розв'язавши рівняння (4) відносно невідомих коефіцієнтів, отримаємо їх значення.

2. *Метод невизначених коефіцієнтів.*

У рівності многочленів (4) прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$ .

У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Розв'язуємо її відомими методами.

3. *Комбінація методів задання частинних значень та методу невизначених коефіцієнтів.*

Спочатку використовують метод 1, потім метод 2.

Найчастіше використовується саме комбінація методів 1 і 2.

**Приклад 1.** Розкласти заданий правильний раціональний дріб на суму найпростіших

дрібів: 
$$\frac{Q_1(x)}{P_3(x)} = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Розв'язання.

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Записано з урахуванням аналізу коренів знаменника:

$$x-1=0 \quad x=1 \text{ - корені дійсні}$$

$$x^2+1=0 \quad D=0-4<0 \text{ - корені комплексні.}$$

Далі зводимо вираз справа до спільного знаменника.

Опустивши знаменник, отримаємо:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Далі використаємо комбінацію методів 1 і 2.

$$x=1 \quad \left| \begin{array}{l} 4 = A \cdot 2 \Rightarrow A = 2 \end{array} \right.$$

$$x^2 \quad \left| \begin{array}{l} 0 = A + B \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = -2 \end{array} \right.$$

$$x^1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 = -B + C \Rightarrow C = 1 + B \Rightarrow C = -1 \end{array} \right.$$

Тоді

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+1}.$$

**Приклад 2.** Розкласти задані раціональні дроби на суму найпростіших дробів, не знаходячи коефіцієнтів.

а)

$$\frac{x^2+5x+2}{(x-1)^3 \cdot x^2 \cdot (x^2+2)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+2)^2} + \frac{C_2x+D_2}{x^2+2}$$

б) 
$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

знаменник розклали на

множники;  $x^2-5x+6=0$ ;  $x_1=3$ ,  $x_2=2$ .

Інтегрування раціональних дробів

1. Інтегрування найпростіших дробів.

а) I тип:  $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

б) II тип:  $\frac{A}{(x-a)^k}, k > 1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

в) III тип:  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, D=p^2-4q < 0 \Rightarrow \frac{p^2}{4} - q < 0,$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx = \left| \begin{array}{l} q - \frac{p^2}{4} > 0 \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2 \end{array} \right| =$$

знаменник має  
комплексні корені  
позначення

виділяємо повний квадрат

$$= \int \frac{Ax+B}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx = \left. \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2} dt =$$

заміна

розкрили дужки і на суму двох інтегралів

$$= A \int \frac{t}{t^2+a^2} dt + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \left. \begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ t^2 + a^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2 \\ = x^2 + px + q \end{array} \right| =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C, a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

г) IV тип

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

$k > 1$ ,  $p^2 - 4q < 0$  - не наводимо через громіздкість виведення. Див. літературу.

2. Інтегрування правильного раціонального дробу.

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx, \quad m < n.$$

Раціональний дріб розкладається на суму найпростіших дробів, кожний з яких інтегрується за наведеними в п 1. правилами.

3. Інтегрування неправильного раціонального дробу.

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx, \quad m \geq n.$$

$$\text{Підінтегральна функція } \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \underbrace{R_{m-n}}_{\text{многочлен}} + \frac{T_{m_1}(x)}{\underbrace{P_n(x)}}_{\text{правильний раціональний дріб}}, \quad m_1 < n.$$

і тоді інтегрування зводиться до інтегрування многочлена та правильного раціонального дробу.

**Приклад.**

$$I = \int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{x}{(x-3)(x-2)} dx = \int \left( \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \right) dx$$

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$x = A(x-2) + B(x-3)$$

$$x = 3 \quad \left| \quad 3 = A \cdot 1; \quad A = 3$$

$$x = 2 \quad \left| \quad 2 = B \cdot (-1); \quad B = -2$$

$$I = \int \left( \frac{3}{x-3} + \frac{-2}{x-2} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{x-3} - 2 \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= 3 \int \frac{d(x-3)}{x-3} - 2 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = 3 \ln|x-3| - 2 \ln|x-2| + C.$$

**Зауваження.**

Запис вигляду  $R(x, y)$  означає, що задана функція, над аргументами якої  $x$  та  $y$  виконуються операції  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$ . Тобто,  $R(x, y)$  означає раціональну функцію змінних  $x$  та  $y$ .



$R\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right)$  - раціональна функція трьох змінних  $x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$ . Наприклад,

$$R\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{x + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

### Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо інтеграли виглядів:

$$1. \int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$$

де  $\frac{r_i}{s_i}$  - задані числа-дроби,  $i = \overline{1, n}$ .

Нехай  $k$  - спільний знаменник дробів  $\frac{r_i}{s_i}$ .

Тоді, якщо ввести заміну  $x = t^k$ , то

$x^{\frac{r_i}{s_i}} = \left(t^k\right)^{\frac{r_i}{s_i}} = t^{\frac{k \cdot r_i}{s_i}} = t^{k_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}$ , бо  $k$  ділиться на  $s_i$  ( $k$  - спільний знаменник,  $s_i$  - один із знаменників).

Отже,

$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx = \left. \begin{array}{l} x = t^k \\ dx = kt^{k-1} dt \\ x^{\frac{r_i}{s_i}} = t^{k_i} \\ t = x^{\frac{1}{k}} \end{array} \right| = \int \underbrace{R\left(t^k, t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n}\right) kt^{k-1} dt}_{\text{це раціональна функція однієї змінної } t: r(t)} = \int r(t) dt,$$

після взяття інтеграла треба повернутись до старої змінної, поклавши  $t = x^{\frac{1}{k}}$ .

$$2. \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx,$$

де  $a, b, c, d$  - задані дійсні числа,

$\frac{r_i}{s_i}$  - задані числа дробів.

Нехай  $k$  - спільний знаменник дробів  $\frac{r_i}{s_i}$ .

Тоді, якщо ввести заміну  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ , то очевидно, що  $x = r(t)$  - раціональна функція від  $t$ .

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_i}{s_i}} = t^{k_i}, \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже } \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx &= \left. \begin{array}{l} \frac{ax+b}{cx+d} = t^k \\ x = r(t) \\ dx = r'(t) dt \\ t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}} \end{array} \right| = \\ &= \int \underbrace{R\left(r(t), t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n}\right) r'(t) dt}_{\substack{\text{раціональна функція} \\ \text{однієї змінної } t: r_1(t)}} = \int r_1(t) dt, \end{aligned}$$

після взяття інтеграла треба повернутись до старої змінної, наклавши  $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$ .

**Приклад.** Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx &= \left. \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \\ \sqrt{x} = t^3 \\ t = x^{\frac{1}{6}} \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt = \\ &= 6 \int \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6 \left( \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctgt} \right) + C, \quad \text{де } t = x^{\frac{1}{6}}. \\ \frac{t^8}{t^2+1} &= t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Для отримання цього виразу виконуємо ділення «кутом».

$$\begin{array}{r}
 t^8 \quad | \quad t^2 + 1 \\
 \hline
 t^8 + t^6 \quad | \quad t^6 - t^4 + t^2 - 1 \\
 \hline
 -t^6 \\
 \hline
 -t^6 - t^4 \\
 \hline
 \quad t^4 \\
 \hline
 \quad t^4 + t^2 \\
 \hline
 \quad -t^2 \\
 \hline
 \quad -t^2 - 1 \\
 \hline
 \quad 1
 \end{array}$$

Зауважимо, що підстановка, яка зводить ірраціональну підінтегральну функцію до раціональної, називається раціоналізуючою.

Зауваження. Інтеграл, що «не беруться».

Як було видно з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить з класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування. Доведено, що існують елементарні функції, інтеграл від яких не є елементарними функціями. Про такі інтегралі кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або «не беруться». Доведено, наприклад, що «не беруться» такі інтегралі:

1.  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  - інтегральний синус
2.  $\int \frac{\cos x}{x} dx$  - інтегральний косинус
3.  $\int \frac{dx}{\ln x}$  - інтегральний логарифм
4.  $\int e^{-x^2} dx$  - інтеграл ймовірностей
5.  $\int x^\alpha \sin x dx$ ,  $\int x^\alpha \cos x dx$ ,  $\int x^\alpha e^x dx$ , ( $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$ )

та ряд інших.

Вказані інтегралі хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скінченне число арифметичних операцій і супероперацій над основними елементарними функціями.

Інтегралі вказаного типу беруться за допомогою рядів. Розділ «Ряди» вивчатиметься у третьому семестрі.

### Інтегрування тригонометричних функцій

Будемо розглядати інтеграл, у яких підінтегральна функція є раціональною функцією змінних  $\sin x$  та  $\cos x$ , тобто  $R(\sin x, \cos x)$ .

1. Універсальна підстановка.

Відомо, що функції  $\sin x$  та  $\cos x$  виражаються через  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , а саме:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Тому універсальною підстановкою є підстановка  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , за допомогою якої беруться інтеграли зазначеного нижче вигляду.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

За допомогою вказаної підстановки беруться інтеграли вказаного вигляду, тому вона називається універсальною.

Але іноді ця підстановка призводить до громіздких викладок, тому застосовують інші підстановки, які враховують характер підінтегральної функції.

2. Нехай  $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$ , тобто підінтегральна функція непарна відносно  $\cos x$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \\ &= \int R_1(\sin x, \cos^2 x) d(\sin x) = \int R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \\ &= |\sin x = t| = \int R_1(t, 1 - t^2) dt = \int r(t) dt. \end{aligned}$$

Після взяття інтеграла треба покласти  $t = \sin x$ .

3. Нехай  $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$

Тобто підінтегральна функція непарна відносно  $\sin x$ .

Тоді, аналогічно попередньому:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \cdot \underbrace{\sin x dx}_{-d(\cos x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int R_1(\sin^2 x, \cos x) d(\cos x) = -\int R_1(1 - \cos^2 x, \cos x) d(\cos x) = \\
&= |\cos x = t| = -\int R_1(1 - t^2, t) dt = \left| \begin{array}{l} -R_1(1 - t^2, t) \\ = r(t) \end{array} \right| = \int r(t) dt.
\end{aligned}$$

Після взяття інтеграла треба покласти  $t = \cos x$ .

Зауваження. Далі будуть потрібні формули, що виражають  $\cos^2 x$  та  $\sin^2 x$  через  $tgx$ .

$$\begin{aligned}
\text{Відомо, що } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x &\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}; \\
\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x = 1 + \frac{1}{tg^2 x} &= \frac{1 + tg^2 x}{tg^2 x}; \Rightarrow \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}.
\end{aligned}$$

4. Нехай  $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ , тобто підінтегральна функція парна відносно  $\sin x$  і  $\cos x$  присутні в парних степенях в підінтегральній функції.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(\sin^2 x, \cos^2 x) dx = \left| \begin{array}{l} t = tg \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \arctgt \\ dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \\
= \int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти  $t = tgx$ .

5. Нехай підінтегральна функція є функцією від  $tgx$ , тобто  $R(tgx)$

$$\int R(tgx) dx = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ x = \arctgt \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int R(t) \frac{1}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти  $t = tgx$ .

6. Нехай задано інтеграли вигляду

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx.$$

У даному випадку підінтегральні функції перетворюються за допомогою відомих формул:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Це зводить обчислення інтегралів до використання таблиці і інтегралів з методом підведення під знак диференціала.

### Приклади.

1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} 2. \int \cos^3 x dx &= \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \\ &= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Тут підінтегральна функція була непарна відносно  $\cos x$ , відокремили  $\cos x$  і далі підведення під знак диференціала і тригонометричні формули.

$$\begin{aligned} 3. \int \cos^2 x dx &= \left| \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \right| = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x dx = \\ &= \int \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

### Тригонометричні підстановки

Тригонометричні підстановки застосовуються для інтегралів спеціального вигляду, а саме:

$$1. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

$$3. \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

Підстановки підбираються таким чином, щоб добувався корінь квадратний з відповідних виразів.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = |x = a \cos t| = \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 t)} = \sqrt{a^2 \sin^2 t} = a \sin t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = |x = atgt| = \sqrt{a^2 (1 + tg^2 t)} = \sqrt{a^2 \frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \left| x = \frac{a}{\cos t} \right| = \sqrt{a^2 \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right)} = \sqrt{a^2 \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = atgt.$$

Тоді

$$1. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ dx = -a \sin t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t \end{array} \right| = - \int R(a \cos t, a \sin t) a \sin t dt = \\ = \int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = atgt \\ dx = a \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t} \end{array} \right| = \int R\left(atgt, \frac{a}{\cos t}\right) a \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\ = \int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

$$3. \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ dx = -\frac{a}{\cos^2 t} \cdot (\sin t) dt \\ \sqrt{x^2 - a^2} = atgt \end{array} \right| = \int R\left(\frac{a}{\cos t}, atgt\right) \cdot \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt = \\ = \int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

**Приклад.** Обчислити заданий інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \sin t \end{array} \right| = -\int \frac{\sin t}{\sin^3 t} dt = -\int \frac{1}{\sin^2 t} dt =$$

$$= ctgt + C = \frac{\cos t}{\sin t} + C = \frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} + C = |\cos t = x| = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

## Тема 3.2 Визначений інтеграл

### Основні поняття

1) Нехай задана функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ . Розіб'ємо цей відрізок на частинні («частичные» - рус.) відрізки точками  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , довжини відрізків  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Кажуть, що виконано розбиття відрізка  $[a, b]$ .

Беремо точку  $\xi_i$  (кси - гр.),  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , знаходимо  $f(\xi_i)$ ;  $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  і формуємо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Це інтегральна сума для функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ .

Позначимо  $\lambda = \max \Delta x_i$ .

Q. Якщо існує границя інтегральної суми  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ , яка не залежить від способу розбиття відрізка  $[a, b]$  і вибору точок  $\xi_i$ , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ .

Позначення:  $\int_a^b f(x) dx$ .

Отже, за означенням:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  (1).

Якщо існує границя справа в (1), то кажуть, що функція  $f(x)$  інтегровна на відрізку  $[a, b]$ .

2) Геометрично: фігура обмежена кривою  $y = f(x)$ , прямими  $x = a$ ,  $x = b$  та віссю  $Oy$  називається криволінійною трапецією.

Виконуємо розбиття відрізка  $[a, b]$ .

Тоді  $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_i$  - площа  $i$ -го прямокутника з висотою  $f(\xi_i)$ , основою  $\Delta x_i$ ,

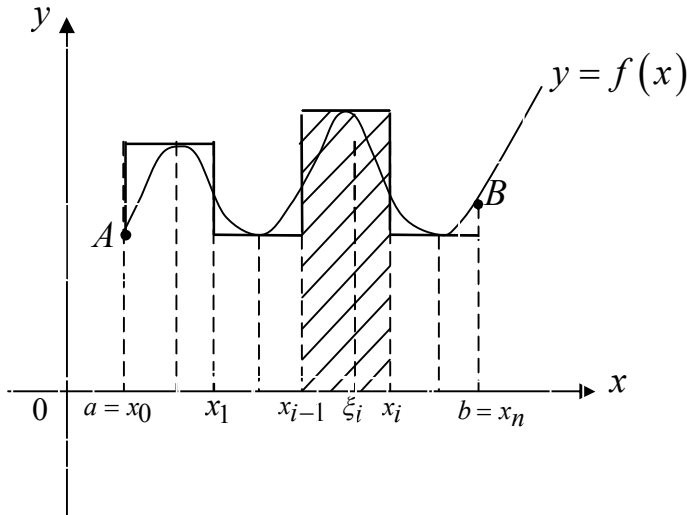
$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_{\text{сх.ф.}}$  - площа східчатої фігури, складеної з вказаних прямокутників,



$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \approx S_{aABb}$  - площа криволінійної трапеції.

Переходячи до границі (1)  $\lambda = \max \Delta_i \rightarrow 0$  отримаємо, що

$$S_{\text{кр.трап.}} = \int_a^b f(x) dx$$



3) Деякі задачі, що зводяться до обчислення визначеного інтеграла:

1. Обчислити шлях, пройдений точкою за проміжок часу від  $\alpha$  до  $\beta$ , якщо швидкість руху  $V(t)$ .

Виконуємо розбиття відрізка  $[\alpha, \beta]$ :  $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_n = \beta$ .

Складаємо суму

$$\sum_{i=1}^n V(\xi_i) \Delta t_i \approx S,$$

де  $S$  - шлях, пройдений точкою за проміжок часу від  $\alpha$  до  $\beta$ .

Переходячи до границі ( $\lambda = \max \Delta t_i \rightarrow 0$ ), маємо

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt.$$

2. Обчислити масу лінійного однорідного стрижня («стержня» - рус.), який розташовано на відріжку  $[a, b]$ , в кожній точці якого задана густина  $\rho = \rho(x)$ .

Виконуємо розбиття відріжку  $[a, b]$ :

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b.$$

Складаємо суму

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i \approx m - \text{маса стрижня.}$$

Переходячи до границі ( $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$ ), отримаємо

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

4) Існують класи інтегрованих функцій, а саме:

Теорема 1. Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , то вона інтегрована на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо функція  $f(x)$  обмежена на відрізку  $[a, b]$  і має на ньому скінчену кількість точок розриву I-го роду, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Приклад інтегрованої функції:  $f(x) = c$  на  $[a, b]$ ,  $c = const$ .

Інтегральна сума:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a).$$

Переходячи до границі, маємо:  $\int_a^b c dx = c(b-a)$ .

Приклад неінтегрованої функції:

Функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{раціональне}, x \in [a, b] \\ 0, & x - \text{іраціональне}, x \in [a, b]. \end{cases}$$

Інтегральна сума:

а)  $x$  - раціональне:  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b-a$ ,

б)  $x$  - іраціональне:  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0$ .

Тут границя інтегральної суми не існує, бо вона залежить від вибору точок  $\xi_i$ . Функція неінтегровна.

#### Властивості визначеного інтеграла

1<sup>0</sup>.  $\int_a^a f(x) dx = 0$

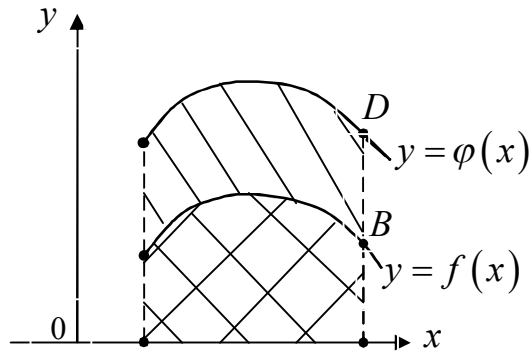
2<sup>0</sup>.  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ , бо зліва  $\Delta x_i < 0$

3<sup>0</sup>.  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , якщо  $f(x) \geq 0$

4<sup>0</sup>.  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$ , якщо  $f(x) \leq \varphi(x)$  на  $[a, b]$ .

Геометрично:

для  $f(x) \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq 0$



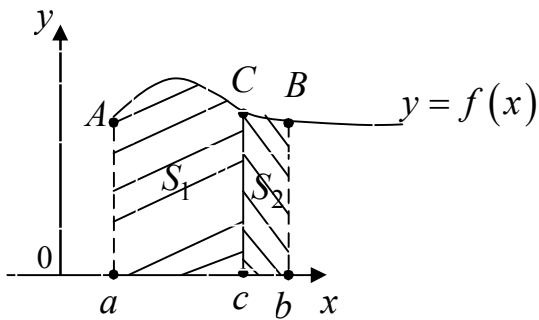
$$S_{aABb} \leq S_{aCDb}$$

5<sup>0</sup>. Властивість адитивності відносно проміжку інтегрування.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \forall a, b, c.$$

Геометрично:

для  $a < c < b$ ,  $f(x) \geq 0$ .



$$S_{aABb} = S_1 + S_2$$

6<sup>0</sup>. Властивість лінійності.

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Без доведення.

7<sup>0</sup>.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad a < b.$

Модуль інтеграла  $\leq$  інтегралу від модуля функції.

Без доведення.

8<sup>0</sup>. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.

Якщо функція  $f(x)$  на  $[a, b]$  має найбільше та найменше значення  $M$  та  $m$  відповідно, то має місце співвідношення:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (1)$$

Д. Згідно з умовою

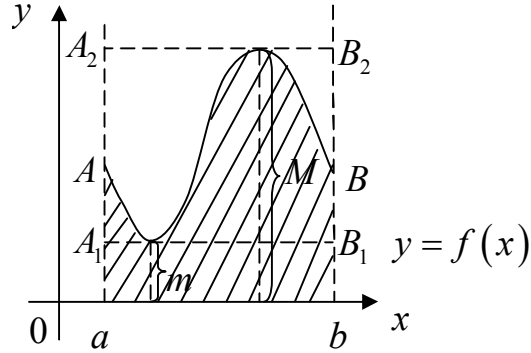
$$m \leq f(x) \leq M.$$

Проінтегруємо кожен частину нерівності на відріжку  $[a, b]$ .

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Геометрично: для  $f(x) \geq 0$



$$S_{aA_1B_1b} \leq S_{aABb} \leq S_{aA_2B_2b}$$

$S_{aA_1B_1b}$  - площа прямокутника з висотою  $m$  ;

$S_{aABb}$  - площа криволінійної трапеції;

$S_{aA_2B_2b}$  - площа прямокутника з висотою  $M$  .

9<sup>0</sup> . Теорема про середнє значення функції.

Якщо функція  $f(x)$   $\square$  неперервна на  $[a, b]$ , то існує така точка  $\xi \in [a, b]$ , що має місце співвідношення:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a). \quad (2)$$

Д. Враховуючи, що  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ , вона приймає всі значення між її найменшим та найбільшим значенням, тобто

$$m \leq f(x) \leq M. \quad (3)$$

Згідно з властивістю 8<sup>0</sup>

$$m(b-a) = \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (1)$$

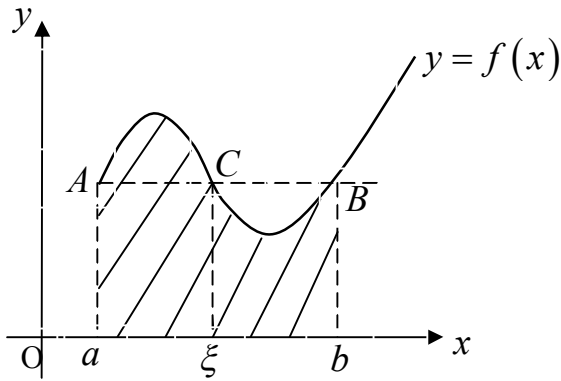
Ділимо всі частини нерівності на  $(b-a)$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M. \quad (4)$$

Порівнюємо (3) і (4). Знайдеться така точка  $\xi \in [a, b]$ , що

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Геометрично: для  $f(x) \geq 0$



$$S_{\text{прям.}aABb} = S_{\text{кр.тра}ABb}$$

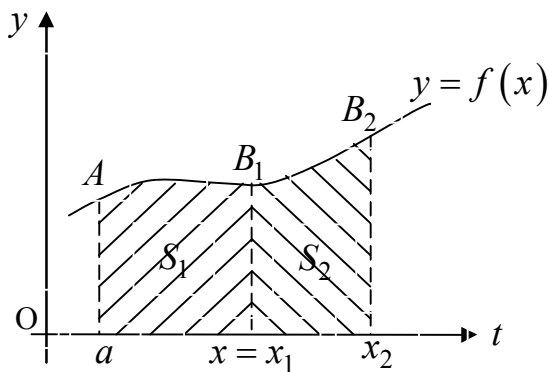
Площі криволінійної трапеції та прямокутника, з основою довжини  $b - a$  і висотою  $f(\xi)$ , рівновеликі.

### Інтеграл зі змінною верхньою межою

Вигляд інтеграла:

$$\int_a^x f(t) dt = \Phi(x). \quad (1)$$

Геометрично:  $\int_a^x f(t) dt$  - змінна площа криволінійної трапеції (для  $f(x) \geq 0$ ).



$$\int_a^{x_1} f(t) dt = S_1,$$

$$\int_a^{x_2} f(t) dt = S_2.$$

І. Нехай функція  $f(x)$  неперервна і має місце співвідношення:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (1)$$

$$\text{то } \Phi'(x) = \left( \int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x). \quad (2)$$

$$\text{Д. } \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x}; \quad (*)$$

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt =$$

$$= \int_a^x \cancel{f(t) dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x \cancel{f(t) dt} = f(\xi)(x+\Delta x-x) = f(\xi) \cdot \Delta x.$$

↖ ↗  
властивість  $9^0$

Підставимо в (\*)

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(\xi)} \Delta x}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Отже,  $\Phi'(x) = f(x)$  (3), що й треба було довести.

Наслідок.

З (3)  $\Phi'(x) = f(x)$  випливає, що  $\Phi(x)$  є первісною для функції  $f(x)$ , причому

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (4).$$

### Формула Ньютона-Лейбніца

Т. Якщо функція  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ , то має місце формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (5)$$

де  $F(x)$  - первісна для функції  $f(x)$ .

Д. Нехай  $F(x)$  і  $\Phi(x)$  дві первісні для функції  $f(x)$ . Відомо, що вони відрізняються на довільну сталу:

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

Врахуємо (4), що  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

$$\text{Тоді } F(x) = \int_a^x f(t) dt + C. \quad (6)$$

Покладемо в (6)  $x = a$  та  $x = b$ .

$$x = a; F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = C \Rightarrow C = F(a)$$

$$x = b; F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = \int_a^b f(t) dt + F(a).$$

Звідси  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ , що й треба було довести.

Зауваження: на практиці формула (5) записується у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (6)$$

де  $F(x)$  - первісна для  $f(x)$ ,  $F(x) \Big|_a^b$  - читається так: подвійна підстановка від  $a$  до  $b$ .

## Методи обчислення визначних інтегралів

### Заміна змінної у визначному інтегралі

Г. Нехай:

- 1) функція  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ ;
- 2) функція  $x = \varphi(t)$  неперервна і має неперервну похідну  $\varphi'(t)$  на  $[\alpha, \beta]$ ;
- 3)  $\forall t \in [\alpha, \beta]$  відповідні значення  $x \in [a, b]$ , причому  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ .

Тоді має місце формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Д.

Нехай  $F(x)$  - первісна для функції  $f(x)$ . Випишемо невизначені інтеграли, що відповідають лівій та правій частинам:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F \left[ \underbrace{\varphi(\beta)}_b - \underbrace{\varphi(\alpha)}_a \right] = F(b) - F(a).$$

за умовою

Праві частини рівні, отже рівні і ліві, тобто маємо формулу (1).

При обчисленні інтегралів, формула (1) записується у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt.$$

### Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Г. Якщо функції  $u(x)$  і  $v(x)$  диференційовні на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2)$$

Д.

Відомо, що  $d(u \cdot v) = v du + u dv$ .

Інтегруємо ліву та праву частини на відрізку  $[a, b]$

$$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(u \cdot v) - \int_a^b v du$$

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v + c) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

що й треба було довести.

Докладніше:

$$\text{Тут } (u \cdot v + c) \Big|_a^b = u \cdot v \Big|_{x=b} + c - u \cdot v \Big|_{x=a} - c = u \cdot v \Big|_a^b.$$

### Інтеграли від функцій з симетричними межами інтегрування

Г. Має місце формула  $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ функція } f(x) \text{ непарна,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ функція } f(x) \text{ парна.} \end{cases}$

Д.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (*)$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \left. \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \\ x = -a, t = a \\ x = 0, t = 0 \end{array} \right| = \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx.$$

(поміняли формально літеру  $t$  на літеру  $x$ ).

Підставимо в формулу з (\*)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (**)$$

1) Нехай  $f(x)$  непарна:  $f(-x) = -f(x)$ .

Підставимо в (\*\*)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

2) Нехай  $f(x)$  парна:  $f(-x) = f(x)$ .

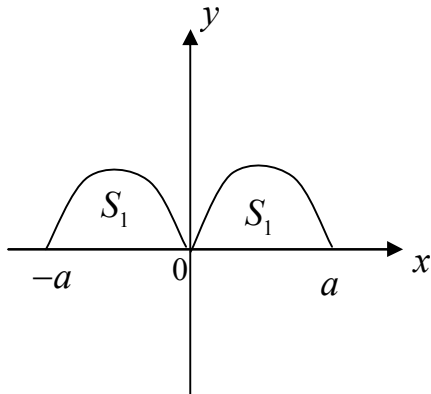
Підставимо в (\*\*)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Геометрично:

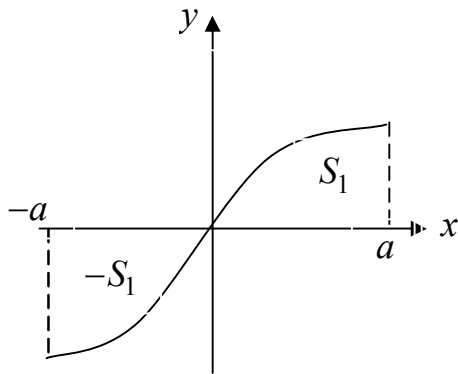


$$f(x) \text{ - парна; } \int_{-a}^a f(x) dx = S_1 + S_2 = 2S_1 = 2 \int_0^a f(x) dx.$$



$$f(x) \text{ - непарна; } \int_{-a}^a f(x) dx = S_1 - S_1 = 0$$

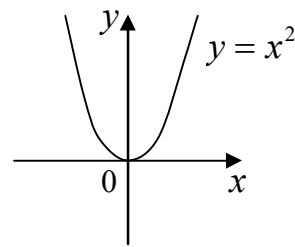
$S_1$  - площа відповідних областей.



Використовується для спрощення обчислень.

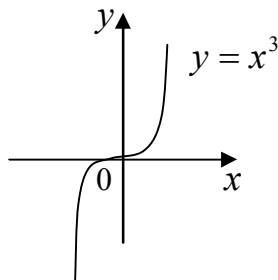
$$1. \int_{-5}^5 x^2 dx = 2 \int_0^5 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = 2 \cdot \frac{5^3}{3}.$$

↙  
функція парна



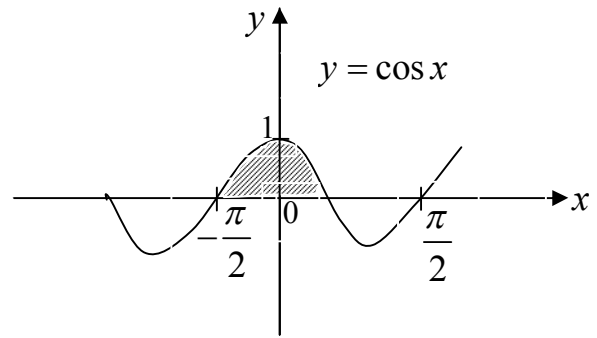
$$2. \int_{-7}^7 x^3 dx = 0$$

↙  
функція непарна



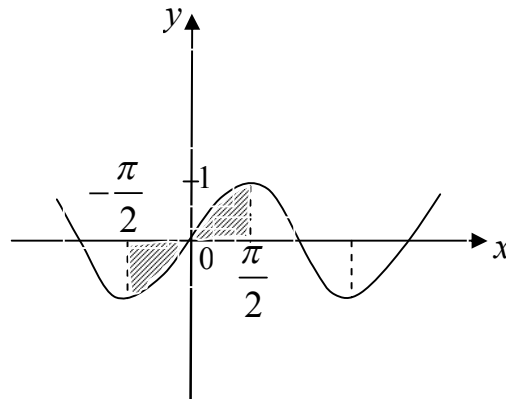
$$3. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

функція парна



$$4. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$$

функція непарна



### Тема 3.3 Невласні інтеграли

#### Невласні інтеграли I-го роду

##### 1) Основні поняття

До невластних інтегралів I-го роду відносяться інтеграли, у яких одна чи обидві межі інтегрування є  $+\infty$  або  $-\infty$ , а саме:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

О.1. Невласний інтеграл вигляду

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx, \quad (1)$$

де функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, A]$ .

Якщо існує границя справа в (1), то кажуть, що інтеграл збігається; в противному разі – розбігається.

О.2. Невласний інтеграл вигляду

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx, \quad (2)$$

де функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[B, b]$ .

Якщо існує границя справа в (2), то інтеграл збігається; в противному разі – розбігається.

О.3. Невласний інтеграл вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad (3)$$

де  $c \in R$ .

Вважається, що інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  збігається, коли обидва інтеграли справа в (3)

збігаються; в протилежному разі – розбігається.

Зауважимо, що інтеграл типу (2) зводиться до типу (1) заміною змінної. Надалі детальніше будемо розглядати саме інтеграл типу (1).

2) *Зв'язок з первісною* (аналог формули Ньютона – Лейбніца).

Вважаємо, що  $F(x)$  первісна для функції  $f(x)$  на  $[a, A]$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(x)|_a^A = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

Отже,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$ . (1')

Інтеграл зліва збігається, коли  $\exists$  скінченна границя  $F(+\infty)$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty). \quad (2')$$

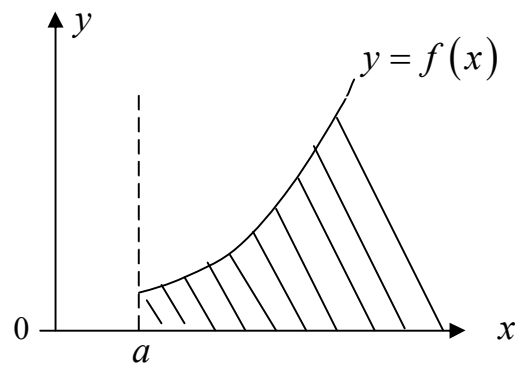
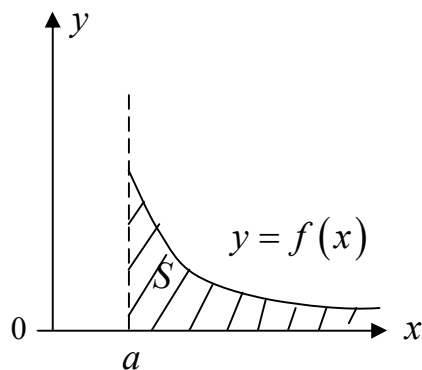
Інтеграл зліва збігається, коли  $\exists$  скінченна границя  $F(-\infty)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = F(c) - F(-\infty) + F(+\infty) - \\ &- F(c) = F(-\infty) + F(+\infty) = F(x)|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \quad (3') \end{aligned}$$

Інтеграл зліва збігається тоді і тільки тоді, коли існують скінченні обидві границі  $F(+\infty)$  і  $F(-\infty)$ .

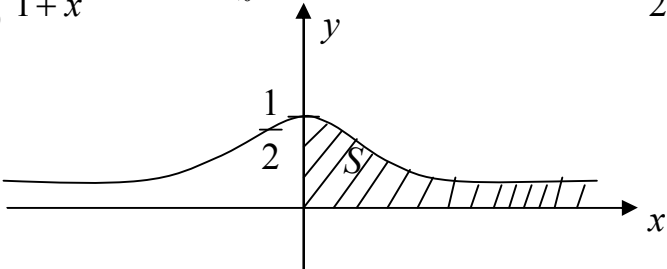
3) *Геометрична інтерпретація.*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = S \quad \square \text{ площа необмеженої області.}$$



Згідно рис. 1 інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  збігається, на рис. 2 – розбігається.

**Приклад.** Дослідити на збіжність заданий інтеграл.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$


$$S = \frac{\pi}{2}$$

4) Дослідження на збіжність інтеграла спеціального вигляду.

Розглядаємо  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

Нехай  $p = 1$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = \infty - 0 = \infty \Rightarrow \text{інтеграл розбігається.}$$

Нехай  $p \neq 1$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{-p+1} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{-p+1} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \Rightarrow \text{інтеграл збігається} \\ \infty, & p < 1 \Rightarrow \text{інтеграл розбігається} \end{cases}$$

$$0, p > 1$$

$$+\infty, p < 1$$

**Висновок.**  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{збігається, } p > 1 \\ \infty, & \text{розбігається } p \leq 1 \end{cases}$

Вказаний інтеграл є *еталонним* при дослідженні інтегралів на збіжність при використанні ознак збіжності, які називаються ознаками порівняння.

5) *Ознаки порівняння для дослідження на збіжність невласних інтегралів.*

**Т.1. (перша теорема порівняння).**

Нехай задано два інтеграли:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (1), \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \quad (2)$$

$$\text{і } 0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \quad (3)$$

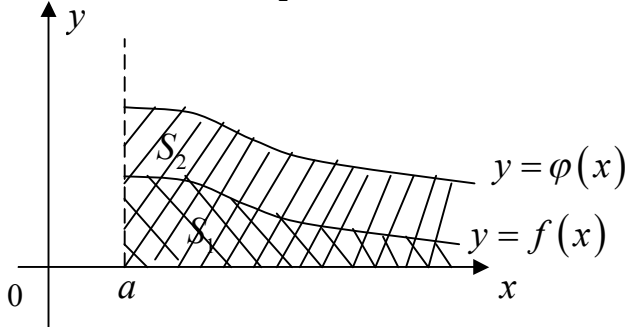
тоді:

1. Якщо інтеграл (2) збігається, то інтеграл і (1) збігається;
2. Якщо інтеграл (1) розбігається, то інтеграл і (2) розбігається.

Пояснення.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = S_1; \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = S_2; \quad S_1 \leq S_2 \quad (\text{за умовою, бо має місце (3)}).$$

1. (2) збігається, отже  $S_2$  - скінчена величина, але  $S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_1$  - скінчена величина.



3. (1) розбігається,  $S_1 = +\infty$ ;  
але  $S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_2 = +\infty \Rightarrow$  (2) – розбігається.

Г.2. (гранична ознака порівняння).

Нехай задано два інтеграли: (1), (2):

$$f(x) \geq 0, \quad \varphi(x) \geq 0. \quad (3)$$

Тоді, якщо існує  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0, \quad (4)$

то інтеграли (1), (2) обидва або збігаються, або розбігаються.

Без доведення.

Теорема 2 зручна для застосування у випадку, коли  $A = 1$ , тобто  $f(x) \sim \varphi(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Приклад. Дослідити на збіжність заданий інтеграл.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + x}. \quad (1)$$

Застосуємо теорему 2.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 3x^3 + x} \sim \frac{1}{x^4} = \varphi(x)$$

$x \rightarrow +\infty$ .

Інтеграл для порівняння:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}. \quad (2)$$

Інтеграл (2) еталонний  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad p = 4 > 1 \Rightarrow$  інтеграл (2) збігається. Згідно теорему 2,

інтеграл (1) збігається.

У випадку, коли підінтегральна функція  $f(x)$  знакозмінна, розглядається інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1), \text{ а також } \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \quad (2).$$

Т.3. (достатня ознака збіжності).

Якщо збігається інтеграл (2), то збігається і інтеграл (1).

Без доведення.

Невласний інтеграл (1) називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл (2).

Невласний інтеграл (1) називається умовно збіжним, якщо він збігається, а інтеграл (2) розбігається.

Зауваження. Поняття особливої точки функції.

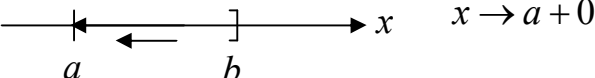
Будемо казати, що точка  $x = a$  особлива точка функції  $f(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,

тобто функція  $f(x)$  необмежена в околі точки  $x = a$ .

Будемо розглядати відрізок  $[a, b]$ , на якому задана функція  $f(x)$ .

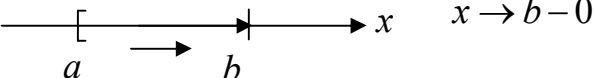
1. Нехай  $x = a$  - особлива точка функції  $f(x)$ .

Тоді  $x \in (a, b]$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ .

Геометрично:   $x \rightarrow a + 0$

2. Нехай  $x = b$  - особлива точка функції  $f(x)$ .

Тоді  $x \in [a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ .

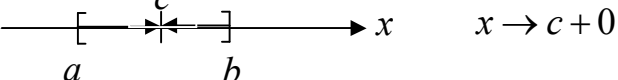
Геометрично:   $x \rightarrow b - 0$

3. Нехай  $x = c$  - особлива точка функції  $f(x)$

$a < c < b$ .

Тоді  $x \in [a, c)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \infty$

$x \in (c, b]$ ,  $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \infty$

Геометрично:   $x \rightarrow c - 0$   
 $x \rightarrow c + 0$

## Невласні інтеграли II роду

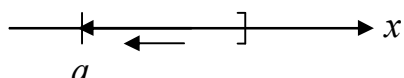
1) Основні поняття.

До невластних інтегралів II роду відносяться інтеграли від необмежених функцій.

Вигляд цих інтегралів такий же, як вигляд визначених інтегралів і для їх розпізнавання треба досліджувати, чи є функція  $f(x)$  необмеженою в точках відрізка інтегрування.

О.1. Нехай функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $(a, b]$ , точка  $x = a$  - особлива точка функції  $f(x)$ .

Тоді невластний інтеграл II роду



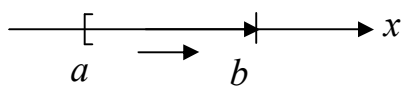
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (1) \quad b$$

Якщо існує скінчена границя справа в (1), то невластний інтеграл збігається, в протилежному разі – розбігається.

О.2. Нехай функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $[a, b)$ , точка  $x = b$  - особлива точка функції  $f(x)$ .

Тоді невластний інтеграл II роду

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2)$$



Якщо  $\exists$  границя справа в (2), то інтеграл збігається, в протилежному разі – розбігається.

О.3. Нехай точка  $x = c$ ,  $a < c < b$  - особлива точка функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ .

Тоді невластний інтеграл II роду

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (3)$$

причому невластний інтеграл збігається тоді і тільки тоді, коли обидва інтеграли справа в (3) збігаються.

Можна довести, що невластний інтеграл типу (2) зводиться заміною змінної до вигляду (1), тому в основному будемо розглядати інтеграли вигляду (1).

2) *Зв'язок з первісною* (аналог формули Ньютона-Лейбніца).

Нехай точка  $x = a$  особлива точка функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ , функція  $f(x)$  неперервна на проміжку  $(a, b]$  і має первісну  $F(x)$  на цьому проміжку.

Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = F(b) - F(a+\varepsilon). \quad (1')$$

Тут  $F(a+\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow a+\varepsilon} F(x)$ . Якщо  $x = b$  - особлива точка функції  $f(x)$  на відрізку

$$[a, b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = F(b-\varepsilon) - F(a).$$

$$\text{Тут } F(b-\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow b-\varepsilon} F(x).$$

У випадку  $x = c$  особлива точка функції  $f(x)$ ,  $a < c < b$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{c-\varepsilon} + F(x) \Big|_{c+\varepsilon}^b = \\ &= F(c-\varepsilon) - F(a) + F(b) - F(c+\varepsilon) = F(b) - F(a) - [F(c+\varepsilon) - F(c-\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (3')$$


Інтеграл справа в (3') збігається, якщо  $\exists$  скінчені границі  $F(c+\varepsilon)$ ,  $F(c-\varepsilon)$  обидві.

Зауваження. При обчисленні інтегралів треба провести аналіз підінтегральної функції на наявність особливих точок на проміжку інтегрування. Якщо таких точок немає, то маємо визначений інтеграл, якщо вони є – невластний інтеграл. Якщо такого аналізу не провести, то можемо отримати помилковий результат.

**Приклад.** Дослідити на збіжність заданий невластний інтеграл II роду.

$$I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \left| x=0 \right| = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^2 \frac{dx}{x^2}}_{I_2}$$

$\swarrow$  особлива точка



$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{-1}^{0-0} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{0-0} = -\left[ \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} + 1 \right] = -\infty.$$

Інтеграл  $I_1$  розбігається, отже інтеграл  $I$  - розбігається ( $I_2$  не розглядали, бо  $I_1$  - розбігається).

!Помилковий розв'язок.

Не проведено аналізу на особливу точку

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^2 x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^2 = -\left( \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{3}{2} < 0,$$

в той же час підінтегральна функція  $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ .

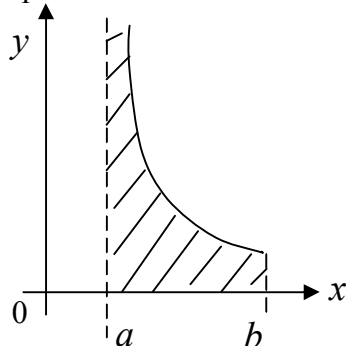
Отримали протиріччя.

3) *Геометрична інтерпретація.*

$f(x) \geq 0$  т.  $x = a$  - особлива точка функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ .

$\int_a^b f(x) dx = S$  - площа фігури, що обмежена кривою  $y = f(x)$ , прямою  $x = b$  та

вертикальною асимптотою.



4) *Дослідження на збіжність інтеграла спеціального вигляду.*

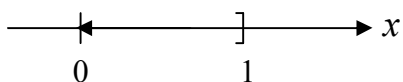
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

При  $p \leq 0$  маємо  $\int_0^1 x^{-p} dx$ ,  $-p \geq 0$ , визначений інтеграл.

1.  $p = 1$ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \left| x=0 \right| = \ln|x| \Big|_{0+0}^1 = \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = 0 - (-\infty) = \infty$$

$\swarrow$  особлива точка





2.  $p \neq 1$ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \left| x=0 \right| = \int_0^1 x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{0+0}^1 = \frac{1}{-p+1} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_{0+0}^1 = \frac{1}{-p+1} \left[ 1 - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^{p-1}} \right] =$$

$$= \begin{cases} \infty, & p > 1 \text{ інтеграл розбігається} \\ \frac{1}{-p+1}, & p < 1 \text{ інтеграл збігається.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^{p-1}} \Rightarrow 1) p-1 > 0, p > 1, x^{p-1} \rightarrow 0, \frac{1}{x^{p-1}} \rightarrow \infty$$

$$2) p-1 < 0, p < 1, x^{p-1} \rightarrow \infty, \frac{1}{x^{p-1}} \rightarrow 0.$$

Висновок:  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  --  $\begin{cases} p \geq 1, \text{ розбігається} \\ p < 1, \text{ збігається.} \end{cases}$

Наведений інтеграл є еталонним при застосуванні ознак порівняння при дослідженні невласних інтегралів II-го роду на збіжність.

4) *Ознаки порівняння для дослідження на збіжність невласних інтегралів.*

Ознаки аналогічні наведеним для невласних інтегралів I роду.

T.1. (перша теорема порівняння).

Нехай задано два інтеграли:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1), \quad \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2),$$

причому т.  $x = a$  - особлива точка функцій  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  і  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$  (3) на  $(a, b]$ .

Тоді:

1. Якщо інтеграл (2) збігається, то і (1) збігається;
2. Якщо інтеграл (1) розбігається, то і (2) розбігається.

Без доведення.

T.2. (гранична ознака порівняння).

Нехай задано інтеграли (1), (2) і  $x = a$  - особлива точка функцій  $f(x)$  та  $\varphi(x)$ ;

$f(x) > 0, \varphi(x) > 0$  (4) на проміжку  $(a, b]$ .

Тоді, якщо  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0$ , то обидва інтеграли або збігаються, або розбігаються

одночасно.

Без доведення.

У випадку, коли функція  $f(x)$  знакозмінна, то розглядаються інтеграли:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1) \quad \text{і} \quad \int_a^b |f(x)| dx \quad (5), \quad x = a \text{ - особлива точка функцій } f(x).$$

T.3. Якщо інтеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  (5) збігається, то збігається і інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

Без доведення.

Існує така термінологія:

Якщо інтеграл (5) збігається, то інтеграл (1) абсолютно збіжний.

Якщо (1) збігається, а (5) розбігається, то (1) умовно збіжний.